体積

2021 年 11 月 9 日

1　体積

１変数の積分により「グラフの下の部分の面積」が求められるように，２重積分を用いると「グラフの下の部分の体積」を求めることができる．

定理 1.1. $f : \mathbb{R}^2 \to [0, \infty)$ を非負値有界関数，$D \subset \mathbb{R}^2$ を有界閉集合とする．２重積分

$$V = \iint_D f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

が存在するならば，立体 $A = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D \text{ かつ } 0 \leq z \leq f(x, y)\}$ の体積は V である．

「体積」の概念自体は三重積分を用いて定義されるが，これは上の方法で求めた結果と一致する．

2　計算例

例 1. 高さ h，底面の半径が a である円錐の体積を求めてみる．円錐をグラフで表すには関数

$$f(x, y) = h\left(1 - \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{a}\right)$$

と

$$D = \{(x, y) \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leq a\}$$

を用いて $A = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D \text{ かつ } 0 \leq z \leq f(x, y)\}$ とすれば良い．したがって

$$V = \iint_D f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^a h\left(1 - \frac{r}{a}\right) r\mathrm{d}r\right) \mathrm{d}\theta$$

を計算すればよく，結局 $V = \frac{\pi a^2 h}{3}$ と求められる．

2 つのグラフで囲まれた部分の体積も求めることができる．$A = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D \text{ かつ } g(x, y) \leq z \leq f(x, y)\}$ という形の立体については２重積分

$$V = \iint_D (f(x, y) - g(x, y))\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

を考えれば良い．

例 2. 半径 a の球体 S の体積を求めてみる．球体をグラフで表すと

$$f(x,y) = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$$
$$g(x,y) = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$$

と

$$D = \{(x,y) \mid \sqrt{x^2+y^2} \leq a\}$$

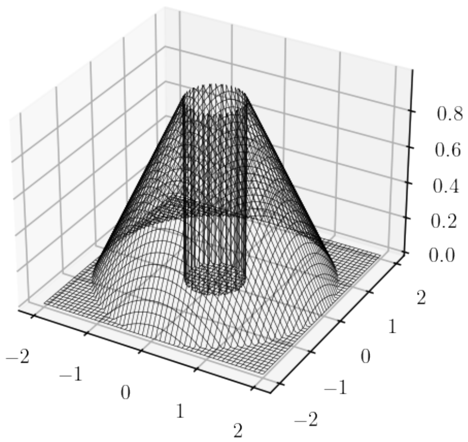
を用いて $S = \{(x,y,z) \mid (x,y) \in D$ かつ $g(x,y) \leq z \leq f(x,y)\}$ となる．よって

$$V = \iint_D (f(x,y) - g(x,y))\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\iint_D \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

を計算すれば良い．積分を実行すると，これはもちろん $V = \frac{4\pi a^3}{3}$ になる．

「穴のあいた」立体の体積も，積分範囲を工夫することで求めることができる．

例 3. 次の図のように，円錐の中央に穴を開けたときの体積を考える．



底面の半径を a, 中央の穴の半径を b, 高さを h とすると穴を開ける前の円錐の高さは $\frac{ha}{a-b}$ である．よって

$$f(x,y) = \frac{ha}{a-b}\left(1 - \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{a}\right)$$

を

$$D = \{(x,y) \mid b \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq a\}$$

において積分すれば良い．積分を実行すると

$$\frac{\pi h}{3}(a^2 + ab - 2b^2)$$

を得る．