無限領域上の広義積分

2021 年 11 月 2 日

1　無限領域上の広義積分

積分を行いたい領域 D が非有界な場合も広義積分を考える必要がある．前回述べたように，$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ が領域 D 上で常に $f(x,y)\geq 0$ であるとき，広義積分は

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\sup\left\{\iint_K f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \mid K \text{ は } D \text{ に含まれる有界閉集合で面積が定まるもの}\right\}$$

と定義される．

具体的な計算は前回の講義ノートの定理 1.2 の条件を満たす閉集合の列を構成することで行われる．すなわち，

1. 任意の n について $K_n\subset K_{n+1}\subset D$（$K_n$ は単調増加）.
2. どのような有界閉集合 $A\subset D$ についてもある N が存在して $A\subset K_N$（K_n はどの有界閉集合よりも増大）.

という $\{K_n\}$ を作り，

$$\lim_{n\to\infty}\iint_{K_n} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

を計算して $n\to\infty$ の極限をとる．

特に $\mathbb{R}^2$ 全体での積分を計算する時には，途中の積分領域 K_n の選び方として次のものがよく使われる．

- 累次積分をそのまま計算できそうなときは $K_n=[-n,n]\times[-n,n]$.
- 極座標に変換して計算できそうなときは $K_n=(\text{半径 } n \text{ の円盤})$.

問題の性質によってはこれ以外にも有用な選び方がありうるので，場合に合わせて工夫すると良いだろう．

2　計算例

例 1. 次の積分を考える．

$$\iint_{\mathbb{R}^2}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(1+x^2+y^2)^2}$$

これについては被積分関数に x^2+y^2 という組が入っているので極座標に変換して考えると良い．$K_n=$ (半径 n の円盤) とすれば

$$\begin{aligned}\iint_{K_n}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(1+x^2+y^2)^2}&=\int_0^{2\pi}\left(\int_0^n\frac{r}{(1+r^2)^2}\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\theta\\&=\left(1-\frac{1}{(1+n^2)^2}\right)\pi\end{aligned}$$

したがって，$n\to\infty$ の極限を取れば

$$\iint_{\mathbb{R}^2}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(1+x^2+y^2)^2}=\pi$$

である．

どのような関数でも広義積分が有限の値になるわけではないことには注意が必要である．

例 2. 次の積分を考える．

$$\iint_{\mathbb{R}^2}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{1+x^2+y^2}$$

これについては先ほどの例と同様に極座標に変換して計算すると

$$\iint_{K_n}\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{1+x^2+y^2}=\pi\log(1+n^2)$$

となるので広義積分は有限の値にならない．

一般に，広義積分が有限の値になるためには被積分関数が「遠くの方」で十分に早く 0 に近づいてゆく必要がある．上の 2 つの例では，$\frac{1}{(1+x^2+y^2)^2}$ の方が $\frac{1}{1+x^2+y^2}$ よりも早く 0 に近づくので，広義積分の挙動に差が生じている．