補足資料：2 変数関数の基礎

2021 年 9 月 16 日

1　平面上の距離

実数の組全体からなる集合を $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \text{ は実数 }\}$ と表記する．これはもちろん平面とみなすことができる．また，$\mathbb{R}^2$ の任意の 2 点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ と $a, b \in \mathbb{R}$ に対して

$$a(x_1, y_1) + b(x_2, y_2) = (ax_1 + bx_2, ay_1 + by_2)$$

のように加算とスカラー倍が定義できる．

各 $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ に対して

$$||(x, y)|| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

と表記する．これは座標ベクトルの「長さ」とみなせる．この記法を用いて，$\mathbb{R}^2$ の 2 点間の距離は次のように定義される[*1]．

定義 1.1. $\mathbb{R}^2$ の任意の 2 点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ について，その間の**距離**を

$$\|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\|$$

で定義する．

距離の性質として次が基本的である．

定理 1.2. $\mathbb{R}^2$ の任意の *3* 点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ について次が成り立つ[*2]．

1. $\|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\| = 0$ となるのは $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ のときのみ．
2. $\|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\| = \|(x_2, y_2) - (x_1, y_1)\|$．
3. 次の不等式 *(***三角不等式***)* が成り立つ[*3]．

$$\|(x_1, y_1) - (x_3, y_3)\| \leq \|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\| + \|(x_2, y_2) - (x_3, y_3)\|$$

$\mathbb{R}^2$ の点は $\mathbf{a} = (x, y)$ のように，座標での表記を省略して太字で書くこともある．

[*1] 距離を定義するという言い方は多少奇妙に聞こえるかもしれない．今手元にある $\mathbb{R}^2$ は数の組のなす集合でしかないので，距離の概念は定義する必要がある．何より，$\mathbb{R}^2$ の距離としてここで考えたもの以外を採用することもある．

[*2] なお，実数の絶対値についても同様のことが成り立つ．例えば $|x - z| < |x - y| + |y - z|$ など．

[*3] 三角不等式という名前は，この不等式が三角形の成立条件に他ならないことから名付けられた．

練習問題 1.3. $\mathbb{R}^2$ の任意の点 $\mathbf{a} = (x, y)$ について以下を示せ.

$$\max\{|x|, |y|\} \leq \|\mathbf{a}\| \leq |x| + |y|.$$

練習問題 1.4. $\mathbb{R}^2$ の任意の n 点 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \cdots, \mathbf{a}_n$ について次が成り立つことを示せ.

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \mathbf{a}_i \right\| \leq \sum_{i=1}^{n} \|\mathbf{a}_i\|.$$

2　点列の収束

$\mathbb{R}^2$ の点列の収束という概念も実数の場合と同様にして定義される.

定義 2.1 (点列の極限). 点列 $\{\mathbf{a}_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対し，$\mathbf{a}$ が $\mathbf{a}_n$ の**極限**であるとは，任意の $\epsilon > 0$ に対して $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ が存在し，任意の $n > N_\epsilon$ について

$$\|\mathbf{a}_n - \mathbf{a}\| < \epsilon$$

となることである．このとき

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{a}_n = \mathbf{a}$$

と書く．これは

$$\lim_{n\to\infty} \|\mathbf{a}_n - \mathbf{a}\| = 0$$

と同値である.

練習問題 2.2. 点列 $\{\mathbf{a}_n\}_{n=1}^{\infty}$ を考える．$\mathbf{a}_n = (x_n, y_n)$ とおいたとき，以下は同値であることを示せ (ヒント：練習問題 1.3 を用いる).

1. $\lim_{n\to\infty} \mathbf{a}_n = \mathbf{a}$
2. $\mathbf{a} = (x, y)$ として $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ かつ $\lim_{n\to\infty} y_n = y$.

点列 $\{\mathbf{a}_n\}_{n=1}^{\infty}$ に対し，$n_i < n_{i+1}$ となるような自然数の列 n_i を用いて $\{\mathbf{a}_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$ の形に表される点列を $\{\mathbf{a}_n\}_{n=1}^{\infty}$ の**部分列**という.

点列の取り扱いが容易なタイプの集合として有界集合がある.

定義 2.3. 部分集合 $A \subset \mathbb{R}^2$ が**有界**であるとは，ある $M > 0$ が存在して，

$$\|\mathbf{x}\| \leq M$$

が任意の $\mathbf{x} \in A$ について成り立つことである.

つまり，有界集合とは十分に半径を大きくすれば原点中心の円に含まれるようにできる集合である.

有界集合については次が基本的である.

定理 2.4. 部分集合 $A \subset \mathbb{R}^2$ が有界であれば，A に含まれる点列 $\{\mathbf{a}_n\}_{n=1}^{\infty}$ は収束部分列をもつ.

定義 2.5. 部分集合 $A \subset \mathbb{R}$ が**閉集合**であるとは，収束列 $\{a_n\}$ が任意の n について $a_n \in A$ であればその極限も A に含まれることである.

なお，閉集合の補集合を**開集合**という.

3　連続関数

まず初めに関数の概念と記法を思い出そう．

定義 3.1. 部分集合 $A \subset \mathbb{R}^2$ について，A 上の**関数**とは A の各点 $\mathbf{a}$ と実数 $f(\mathbf{a})$ との対応のことである．A 上の関数は $f : A \to \mathbb{R}$ と書く．また，$f(x, y)$ という形に書くことも多い．A を関数 f の**定義域**という．

例 1. 例えば $f(x, y) = x + y$ とすることで $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ が定義される．関数は $\mathbb{R}^2$ 全体で定義されていなくても良い．$g(x, y) = \log(1 - x^2 - y^2)$ とすると，これは $B = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$ として $g : B \to \mathbb{R}$ である．

関数の連続性は 1 変数の場合と同様にして定義される．

定義 3.2 (関数の各点連続性)**.** $A \subset \mathbb{R}^2$ とする．関数 $f : A \to \mathbb{R}$ が $\mathbf{a}_0 \in A$ において**連続**であるとは，任意の $\epsilon > 0$ に対してある $\delta > 0$ が存在して，$|\mathbf{a} - \mathbf{a}_0| < \delta$ となる任意の $\mathbf{a} \in A$ について

$$|f(\mathbf{a}) - f(\mathbf{a}_0)| < \epsilon$$

となることである．任意の $\mathbf{a}_0 \in A$ において連続であるとき，単に**連続**であるという．

関数の連続性は点列を用いても述べることができる．こちらの方がわかりやすいかもしれない．

定理 3.3. 以下は同値.

1. 関数 $f : A \to \mathbb{R}$ が $\mathbf{a} \in A$ において連続である.
2. A の任意の点列 $\{\mathbf{a}_n\}_{n=1}^{\infty}$ について，$\lim_{n\to\infty} \mathbf{a}_n = \mathbf{a}$ ならば $\lim_{n\to\infty} f(\mathbf{a}_n) = f(\mathbf{a})$.

練習問題 3.4. 定理 3.3 を示せ.

定義 3.5 (関数の一様連続性)**.** 関数 $f : A \to \mathbb{R}$ が**一様連続**であるとは，任意の $\epsilon > 0$ に対してある $\delta > 0$ が存在して，<u>任意の $\mathbf{a}, \mathbf{a}_0 \in A$ に対して</u> $|\mathbf{a} - \mathbf{a}_0| < \delta$ ならば

$$|f(\mathbf{a}) - f(\mathbf{a}_0)| < \epsilon$$

となることである．

1 変数の場合と同様に次が成り立つ.

定理 3.6. 有界閉集合上の連続関数は一様連続.