曲面積

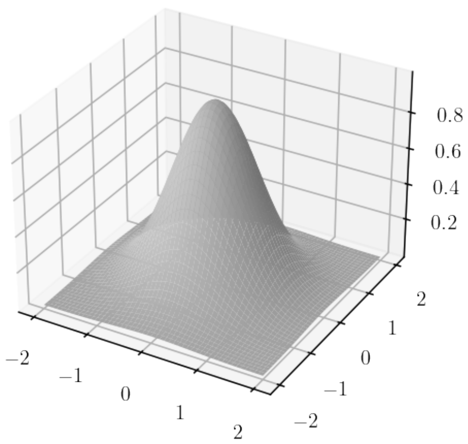
2021 年 11 月 16 日

1　表面積

$z=f(x,y)$ と表される曲面を考える.

例 1. 原点中心，半径 a の球面の上半分は $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ と表される.

例 2. $z=e^{-x^2-y^2}$ は次の図のような曲面である.



このような曲面の面積は次の公式で求めることができる.

定理 1.1. 曲面が連続微分可能な関数 $f(x,y)$ を用いて領域 D 上で $z=f(x,y)$ と与えられているとき，その曲面積は

$$\int_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

である.

この定理の証明については笠原晧司著『微分積分学』の p.283-285 や占部実・佐々木右左編『微分・積分教科書』の p.243-245 を参照.

2　計算例

例 3. 原点中心，半径 a の球面の表面積を求めよう．この場合上半分を表す関数の定義域は

$$D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leq a^2\}$$

であるから $f(x,y)=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ について

$$2\int_D\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\int_D\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

を計算すれば良い．これは曲座標変換で求めることができ，結局 $4\pi a^2$ を得る．

例 4. 常に $f(x)\geq 0$ であるとき，$y=f(x)$ （$a\leq x\leq b$)）のグラフを x 軸を中心に回転させてできる曲面の表面積を計算しよう．この曲面の上半分は

$$z=\sqrt{(f(x))^2-y^2}$$

と表すことができる．またその定義域は

$$D=\{(x,y)\mid -f(x)\leq y\leq f(x),a\leq x\leq b\}$$

である．よって $g=\sqrt{(f(x))^2-y^2}$ として

$$\begin{aligned}2\int_D\sqrt{1+\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=2\int_D\frac{f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}}{\sqrt{(f(x))^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=2\int_a^b\left(\int_{-f(x)}^{f(x)}\frac{f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}}{\sqrt{(f(x))^2-y^2}}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\\&=2\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\left(\int_{-f(x)}^{f(x)}\frac{1}{\sqrt{(f(x))^2-y^2}}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

と変形することができる．積分

$$\int_{-f(x)}^{f(x)}\frac{1}{\sqrt{(f(x))^2-y^2}}\mathrm{d}y$$

については $y=f(x)\cos t$ と変数変換すれば積分を求めることができて

$$\int_{-f(x)}^{f(x)}\frac{1}{\sqrt{(f(x))^2-y^2}}\mathrm{d}y=\pi$$

である．よって

$$2\int_D\sqrt{1+\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\mathrm{d}x$$

となる．これは回転体の表面積の公式として知られている．