補足資料：どのように証明するか

2021 年 9 月 24 日

いきなり証明を書き下せる人はいないので，多少の作業は絶対に必要である．次の例題を用いて証明の扱い方について説明しよう．

例 1. 次の等式を示せ．

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$$

ステップ 1. 示すべき主張を理解する．

このステップが最も重要である．何を主張しているのかが分からなければ，何を示せばよいのかも分からないからである．これは次の手順で考えるとよいだろう．

1. 使われている用語の定義を確認する．
   知っていると思っても，始めのうちは必ず確認したほうが良い．一読して定義を思い出せない用語があれば，下線を引くなどしてメモしておき，後で調べる．
2. 図を書いて状況を理解する．
   図を書くまでもないと思っても，実際に書いてみると思っていたのとだいぶ異なるかもしれない．
3. 具体例を作ってみる．
   一般的に書かれているものを理解することは難しい．具体例で確かめてみると様子が分かりやすい．

この例題では，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$$

という等式を示すことが求められている．順を追って主張の内容を確認してみよう．

1. $\lim_{n\to\infty}$ という記号の定義を確認する．これは $n\to\infty$ としたときの数列 $a_n=\frac{1}{n}$ の極限である．したがって，$a_n=\frac{1}{n}$ の極限が 0 である，というのが主張である．さらに極限の定義によれば，これは任意の $\varepsilon>0$ に対して，N が存在して任意の $n>N$ について

   $$|a_n-0|<\varepsilon$$

   ということである．
2. 数直線上に $a_n=\frac{1}{n}$ を書いてみると，確かに 0 に近づいて行っているように見えることが確認できる．

3. $n = 1, 2, 3, \cdots$ について a_n を計算してみると，確かにどんどんと小さな値になることがわかる．

ステップ 2．前提として使える条件を確認する

証明とは仮定から結論を導出することであるから，前提として使える条件が何なのかをはっきりさせておかないと，証明ができない．一般的に前提として使って良いのは次のいずれかである．

1. <u>公理と用語の定義に含まれる仮定.</u>
   例えば「素数」という用語の定義のうちにはその数が自然数であることが含まれている．したがって，「素数 p について〜」という命題を証明するときには，p が自然数であることは使って良い．また，用語の定義とは別に公理が設定されていることもある．その時はそれもつかってよい．
2. <u>既に示されている命題の結果.</u>
   既に講義や教科書などで示されている命題の結果は，**循環論法にならない限り**使って良い．例えば「$n!$ は n 以下の任意の自然数で割り切れる」という命題が既に示されているなら，「2 から n までのどの数で割っても 1 余る自然数が存在する」という命題を示すときにこの結果を用いて良い．もちろん，示すべき結果を用いて示される命題は使ってはならない．

以上に述べたもの以外を使うのは基本的に反則である．例えば「図より明らか」という論証は行ってはならない．

例題の場合，使えるのは n が自然数であるということだけである．

ステップ 3．前提として使える条件と結論の間を埋める

これが証明の本体であるが，ここまでの分析を丁寧に行えば方針を立てるのは容易であることが多い．また，結論が成り立つためには何が必要かを考えてみるのも役に立つことが多い．

例題の場合，具体例の計算で n を大きくすれば $\frac{1}{n}$ がかなり小さくなりそうなことは観察されている．

また，結論が成り立つには $\varepsilon > 0$ が与えられたとき，

$$\frac{1}{n} < \varepsilon$$

という不等式が十分大きい任意の n について成り立てば良い．「十分大きい」とはどのくらい大きいのかがわかれば証明は完了である．

不等式を少し変形すると

$$\frac{1}{\varepsilon} < n$$

となる．これは「大丈夫」な n は最低でも $\frac{1}{\varepsilon}$ くらいの大きさであることを示しているから，試しに N として $\frac{1}{\varepsilon}$ よりも大きな自然数を一つ選んでみると，$n > N$ のとき

$$\frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon$$

なので欲しかった不等式が得られる．あとは今までの考察を清書することで証明を書き下せる．