べき級数

2021 年 12 月 14 日

1　べき級数（整級数）とは

応用上最も重要なタイプの級数がべき級数である．

定義 1.1. 次の形の級数を**べき級数（整級数）**と呼ぶ．

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

例 1. 以下はべき級数の例である．

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

べき級数は変数として x を含むので，その値により収束・発散が変わる．

例 2. 確認問題で見たように，べき級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

は任意の実数 x について収束する．一方，

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

は $-1 \leq x < 1$ のときだけ収束する．さらに，

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^n x^n$$

は $x = 0$ 以外では収束しない．

収束しない級数を考えることにあまり意味はないので，べき級数を考えるときにはそれがどのような x について収束するのかを必ず調べなければならない．それでは，そのための一般的な方法はあるだろうか．またべき級数が収束する x の範囲にはどのような特徴があるだろうか．

2　べき級数の収束半径

べき級数が収束する x の範囲について最も基本的な事実は次である．

定理 2.1. べき級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

が $x = x_0$ で収束するならば，$|y| < |x_0|$ となる任意の y について

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$$

は絶対収束する．

Proof. $x_0 = 0$ のときは自明なのでそうでないとする．

まず，

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$$

は収束するので

$$\lim_{n\to\infty} |a_n x_0^n| = 0$$

である．したがって

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_n y^n|}{\frac{|y|^n}{|x_0|^n}} = \lim_{n\to\infty} |a_n x_0^n| = 0$$

となるので，ある $M > 0$ が存在して全ての n について

$$\frac{|a_n y^n|}{\frac{|y|^n}{|x_0|^n}} < M$$

すなわち

$$|a_n y^n| < M \frac{|y|^n}{|x_0|^n}$$

が成り立つ．よって

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n y^n| \leq \sum_{n=0}^{\infty} M \frac{|y|^n}{|x_0|^n} = M \frac{1}{1 - \frac{|y|}{|x_0|}} < \infty$$

なので $x = y$ での絶対収束がわかる． □

定理の仮定の不等号には注意が必要である．$|y| = |x_0|$ のときは，x_0 での収束から y での収束を導くことはできない．

例 3. 級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

は $x = -1$ で収束する．しかし，$x = 1$ のときは $|1| = |-1|$ だが収束しない．

また定理を用いて次もわかる．

定理 2.2. べき級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

が $x = x_0$ で収束しないならば，$|y| > |x_0|$ となる任意の y について

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$$

は収束しない．

以上の結果により，べき級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ に対し，

$$R = \sup\{r \mid \text{任意の } |y| < r \text{ について} \sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n \text{は収束 }\}$$

という数が定まることがわかる（任意の y について $\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$ が収束するときは $R = \infty$ と定める）．これを級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の**収束半径**という．

収束半径はダランベールの判定法を用いると簡単に求められる．

定理 2.3. べき級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ に対し

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \alpha$$

が存在するならば，収束半径は $R = \frac{1}{\alpha}$ である．ただし，$\alpha = 0$ のときは $R = \infty$ とする．

3　テイラー展開との関係

べき級数が現れる場面で最も身近なのは関数のテイラー展開（マクローリン展開）である．これは $x = x_0$ で無限回微分可能な関数 f を

$$f(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{d^n f}{dx^n}(x_0) \frac{(x - x_0)^n}{n!} + R_N(x, x_0)$$

という形に展開するものである．もちろんこれは $t = x - x_0$ と置き換えることで今まで見てきた形のべき級数に帰着できる．また R_N は展開の「あまりの項」であり，N 項目までの近似の誤差を表す．そこで $N \to \infty$ のとき $R_N \to 0$ となってくれれば

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^n f}{dx^n}(x_0) \frac{(x - x_0)^n}{n!}$$

とべき級数展開ができるはずである．

定義 3.1. 関数 $f(x)$ が $x = x_0$ で**解析的**であるとは $x = x_0$ でのべき級数展開が可能であること，すなわちある $\varepsilon > 0$ が存在して $|x - x_0| < \varepsilon$ のとき級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^n f}{dx^n}(x_0) \frac{(x - x_0)^n}{n!}$$

は収束し，

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^n f}{dx^n}(x_0) \frac{(x-x_0)^n}{n!}$$

となることである．

$\sin(x)$ や e^x など，応用上重要な関数は大抵解析的である．しかし，例え無限回微分可能な関数でもべき級数に展開できるとはかぎらない．

例 4. 関数

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & (x > 0) \\ 0 & (x \leq 0) \end{cases}$$

は原点で無限回微分可能であり，任意の n について

$$\frac{d^n f}{dx^n}(0) = 0$$

となる．よって，このときはつねに $f(x) = R_N(x, 0)$ となってしまい，全てあまりの部分に含まれてしまう！

さらに，例え解析的な関数を考えたとしてもべき級数展開の結果は元の関数よりも通用する範囲が狭いので，注意が必要である．

例 5. 関数

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

は原点で解析的であり，$|x| < 1$ ならば

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

と展開できる．しかし，右辺のべき級数の収束半径は 1 であり，これは元の関数の定義域よりも狭い．この点を無視して計算すると，例えば $x = 2$ のとき

$$-1 = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n$$

という結果を得てしまう．

（なお，非常に記法が紛らわしいが，これを逆に利用して

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

の値を $\frac{1}{1-x}$ と約束することもできる．この約束の元では上の等式は正当化でき，他にも

$$-\frac{1}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} 5^n$$

などの「変な」等式を作ることができる．これはべき級数の通用する範囲を拡張したことになり，このような操作を解析接続という.）