極座標変換による 2 重積分

2021 年 10 月 19 日

1　極座標変換による 2 重積分

座標変換の中でも，特によく用いられるのが次の**極座標変換**である．

$$
\begin{aligned}
x &= r\cos\theta \\
y &= r\sin\theta
\end{aligned}
$$

ただし $r \geq 0$ である．θ の値の範囲については $0 \leq \theta < 2\pi$ とするのが標準的であるが，$-\pi \leq \theta < \pi$ などと設定することもある．極座標変換については

$$
\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = r
$$

となることから次の結果が得られる．

定理 1.1. $D \subset \mathbb{R}^2$ 上で積分可能な関数 $f(x,y)$ について

$$
\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D'} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta
$$

が成り立つ．ただし，

$$
D' = \{(r,\theta) \mid (r\cos\theta, r\sin\theta) \in D\}
$$

である．

極座標変換が特に有用なのは次の場合である．

- 積分を行う領域 D の極座標による表示が簡単な形であるとき．
- 被積分関数が原点からの距離 $\sqrt{x^2+y^2}$ のみに依存しているとき．

2　計算の例

例 1. $R > 0$ とする．$D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq R^2\}$ のとき，

$$
\iint_D e^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y
$$

を求めよ．

解答. 極座標で表示すると D は長方形

$$[0,R]\times[0,2\pi]$$

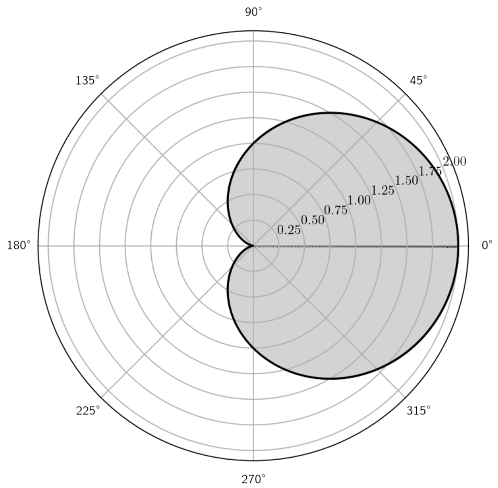
となる．また被積分関数は原点からの距離のみに依存している．そこで極座標に変換すると

$$\iint_D e^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{[0,R]\times[0,2\pi]} e^{-r^2} r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

となる．この積分は実行できて，値は $\pi(1-e^{-R^2})$ である． □

例 2. $D=\{(r,\theta)\mid r\le 1+\cos\theta\}$ のとき，D を図示し，その面積を求めよ．

解答. D を図示すると次のようになる．



D の面積は

$$\iint_D 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

で定義される．これを極座標に変換すると

$$\iint_D 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\left(\int_0^{1+\cos\theta} r\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\theta$$

となる．右辺の積分を実行すると $\frac{3}{2}\pi$ を得る． □