補足資料：証明のパターンについて

2021 年 9 月 23 日

微積分の証明などでよく遭遇する証明のパターンについてまとめておく．例えば「x は正の数」であるといった，x についての命題を $P(x)$ という形に書くことにする．また，例えば「x は y 以上」といった，x と y についての命題を $P(x, y)$ という形に書くことにする．

1　命題の示し方

証明のパターンとして代表的なものをいくつか挙げておく．

- 「任意の x について $P(x)$」という命題を示すには，x を一つ任意に固定して $P(x)$ が成り立つことをいうか，ある x については $P(x)$ が成り立たないとして矛盾を導く．
- 「ある x について $P(x)$」という命題を示すには $P(x)$ が成り立つ x を構成するか，任意の x について $P(x)$ が成り立たないとして矛盾を導く．
- 「任意の x について $P(x)$ または $Q(x)$」という形の命題を示すには $P(x)$ ではない x は $Q(x)$ であることを示すか，$P(x)$ でも $Q(x)$ でもない x が存在するとして矛盾を導く．

例 1. 「2 以外の素数は奇数」という命題を示すことを考える．これはもう少し言葉を足すと，「任意の素数 p について，$p = 2$ でないならば p は奇数」ということである．そこで素数 p を一つ固定して，「$p = 2$ でないならば p は奇数」という命題が成り立つことを言えばよい．対偶をとると「p が偶数ならば $p = 2$」という命題になり，これは偶数の定義と p が素数であることから容易に示せる．

2　命題の否定

「任意の」，「ある〜が存在して」といった表現の入った命題の否定は次のようになる．一覧にするとやや複雑だが，反例を作るにはどうすればよいかを考えると理解しやすい．例えば「任意の x についてある y が存在して $P(x, y)$ が成り立つ」という命題が成り立たないのは，何か非常に都合の悪い x が存在して，どのように y の取り方を工夫しても $P(x, y)$ を成り立たせることができないときである．

- 「任意の x についてある y が存在して $P(x, y)$ が成り立つ」という命題の否定は「ある x が存在して任意の y について $P(x, y)$ が成り立たない」．
- 「ある x が存在して任意の y について $P(x, y)$ が成り立つ」という命題の否定は「任意の x

についてある y が存在して $P(x,y)$ が成り立たない」.

- 「任意の x と任意の y について $P(x,y)$ が成り立つ」という命題の否定は「ある x と y が存在して $P(x,y)$ が成り立たない」.
- 「ある x と y が存在して $P(x,y)$ が成り立つ」という命題の否定は「任意の x と y について $P(x,y)$ が成り立たない」.

例 2. 「任意の偶数 n についてある整数 m が存在して $n=2m$ である」という命題の否定は「ある偶数 n については任意の整数 m について $n \neq 2m$ である」.

3 論理演算の否定

- 「A かつ B」の否定は「A でない，または B でない」.
- 「A または B」の否定は「A でなく B でもない」.
- 「A ならば B」の否定は「A かつ B でない」.

例 3. 「明日が晴れならば出かける」と言っていた人が嘘をついたことになるのは，その翌日が晴れであったもかかわらず出かけなかったときである.