累次積分の計算

2021 年 10 月 5 日

1　累次積分の計算

二重積分を手で求めることは多くの場合工夫を要する．累次積分を用いると１変数の積分に帰着できるので，積分を具体的に実行することができる（こともある）.

例 1. $R = [-1, 1] \times [-1, 1]$ について

$$\iint_R (x+y)e^{-x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

を求めてみる．まず，確認問題 2-b の結果より

$$\iint_R (x+y)e^{-x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_R xe^{-x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_R ye^{-x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

と書くことができる．確認問題 3-a の結果を用いると，$xe^{-x} = xe^{-x} \cdot 1$ なので

$$\iint_R xe^{-x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\int_{-1}^{1} xe^{-x}\mathrm{d}x$$

また

$$\iint_R ye^{-x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \left(\int_{-1}^{1} e^{-x}\mathrm{d}x\right)\left(\int_{-1}^{1} y\mathrm{d}y\right)$$

と書き直すことができる．あとは積分を求めれば良い.

１変数の積分に直しても積分が求められないこともある.

例 2. $R = [-1, 1] \times [-1, 1]$ について

$$\iint_R e^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \left(\int_{-1}^{1} e^{-x^2}\mathrm{d}x\right)\left(\int_{-1}^{1} e^{-y^2}\mathrm{d}y\right)$$

であるが,

$$\int_{-1}^{1} e^{-x^2}\mathrm{d}x$$

の値は簡単な関数を用いて書くことができない.（もちろん近似値を求めることはできる.）

2　積分範囲の設定

累次積分を用いる際，注意しなければならないのが積分範囲の設定である．積分する領域が長方形ならば特に問題はないが，そうでない時は図を書くなどして必ず確認する必要がある．この点は混乱しやすいので注意.

例 3. $D=\{(x,y)\mid x,y\geq 0$ かつ $0\leq x+y\leq\pi\}$ のとき

$$\iint_D \sin(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

を求めよう．第 2 回の定理 1.2 を適用することで積分を行いたい．そのためには積分領域 D を挟む連続関数を見つける必要がある．D の図を書くと

$$\phi_1(x)=0,\ \phi_2(x)=\pi-x$$

として

$$D=\{(x,y)\mid 0\leq x\leq\pi \text{かつ} \phi_1(x)\leq y\leq\phi_2(x)\}$$

なることがわかる.

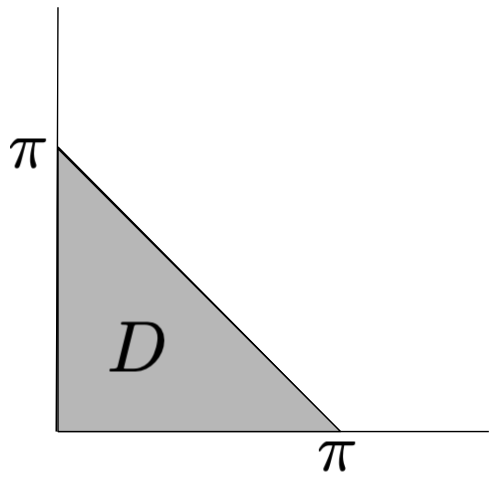

図 1　$D=\{(x,y)\mid x,y\geq 0$ かつ $0\leq x+y\leq\pi\}$ の図.

よって変数 x を動かす範囲は $0\leq x\leq\pi$ である．これを考慮すると

$$\iint_D \sin(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^\pi\left(\int_0^{\pi-x}\sin(x+y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

と書き直せる．あとは

$$\int_0^{\pi-x}\sin(x+y)\mathrm{d}y=[-\cos(x+y)]_{y=0}^{y=\pi-x}=1+\cos x$$

より,

$$\iint_D \sin(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^\pi(1+\cos x)\,\mathrm{d}x=\pi$$

と求められる.

3　面積

面積は積分によって定義される．

定義 3.1. 部分集合 $A \subset \mathbb{R}^2$ の**面積**とは，長方形 R で $A \subset R$ となるものを用いて

$$\iint_R \chi_A(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

と定義される量のことである．ここで $\chi_A(x,y)$ は次により定義される関数である．

$$\chi_A(x,y) = \begin{cases} 1 & (x,y) \in A \text{ のとき} \\ 0 & \text{それ以外のとき} \end{cases}$$

面積は部分集合に関する積分の記法を用いると，次のように書くこともできる．

$$\iint_A 1\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

面積の定義において，部分集合 A を含む長方形 R をとる必要があるが，これはどのようにとっても面積の値に影響はない．また，$\chi_A(x,y)$ が積分できない関数になることもあり得る．もちろん，そのような場合には部分集合 A の面積は定まらない．

例 4. 半径 r の円とは

$$C = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq r^2\}$$

で定義される集合である．$C \subset [-r,r]\times[-r,r]$ なので，その面積は

$$\iint_{[-r,r]\times[-r,r]} \chi_C(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

により定義される．

累次積分を用いると，様々な図形の面積を求めることができる．面積は積分により定義されるものなので，「求める」というよりも「証明」と言った方がふさわしいかもしれない．

例 5. 半径 r の円の面積は πr^2 であることを証明しよう．円周を表す式を y について解くことにより，

$$C = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq r^2\} = \{(x,y) \mid -r \leq x \leq r \text{ かつ } -\sqrt{r^2-x^2} \leq y \leq \sqrt{r^2-x^2}\}$$

と書けることに注意する．$\chi_C(x,y)$ は C 上で常に 1 なので第 2 回の定理 1.2 を適用すると，

$$\begin{aligned}\iint_{[-r,r]\times[-r,r]} \chi_C(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \iint_C 1\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \int_{-r}^{r}\left(\int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} 1\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \\ &= 2\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

と書き直せる．あとは $x = r\sin t$, $-\pi/2 \leq t \leq \pi/2$ と変数変換を行えば

$$\begin{aligned}\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2 - x^2}\mathrm{d}x &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} r^2\cos^2 t\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{\pi r^2}{2}\end{aligned}$$

と計算できる．よって

$$\iint_{[-r,r]\times[-r,r]}\chi_C(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \pi r^2$$

である．