累次積分の定義

2021 年 9 月 28 日

1　累次積分

長方形 $[a,b]\times[c,d]$ 上の 2 変数関数 $f(x,y)$ について考えよう．これは一方の変数の値を固定すると 1 変数関数とみなせる．そこで y の値を固定したとき，関数 $\phi_y(x)=f(x,y)$ が x について積分できるなら

$$F(y)=\int_a^b \phi_y(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x$$

とすることで y の関数を作ることができる．これを利用して，例えば

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$$

と計算するのが**累次積分**である．

物理的な解釈としては次のように考えると良いだろう．$f(x,y)$ が長方形上の点 (x,y) における密度であったとすると，左辺は長方形の全質量に相当する．一方，

$$\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x$$

は y 座標を固定したときの「横線」の質量である．こうした横線の質量を積分すると長方形の全質量が得られる，というのが主張である．

このような操作を正当化するには次の定理を用いる．

定理 1.1. 長方形 $[a,b]\times[c,d]$ 上で二重積分可能な 2 変数関数 $f(x,y)$ を考える．
任意の $y\in[c,d]$ について $\phi_y(x)=f(x,y)$ が x の関数として $[a,b]$ 上で積分可能ならば

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y$$

が成り立つ．

もちろん上の定理で x と y を入れ替えたものも成り立つ．また系として次の結果が得られる．これは様々な形の領域上での積分を求めるときに有用である．

定理 1.2. 2 つの連続関数 $\phi_1:[a,b]\to\mathbb{R}$ と $\phi_2:[a,b]\to\mathbb{R}$ が任意の $x\in[a,b]$ について $\phi_1(x)\le\phi_2(x)$ を満たすものとする．このとき

$$\Omega=\{(x,y)\mid x\in[a,b]\text{ かつ}\phi_1(x)\le y\le\phi_2(x)\}$$

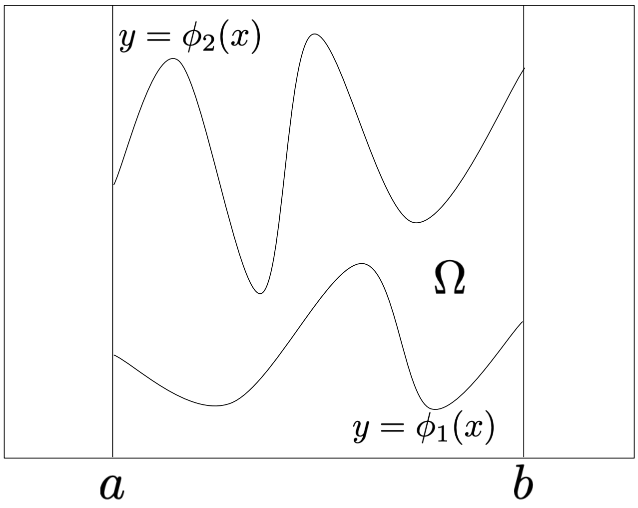

図 1　2 つの連続関数 $\phi_1:[a,b]\to\mathbb{R}$ と $\phi_2:[a,b]\to\mathbb{R}$ により定まる領域 Ω の図.

について，$f(x,y)$ が Ω 上で連続ならば

$$\iint_\Omega f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b\left(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)}f(x,y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x$$

が成り立つ.

定理 1.1 は次の定理を用いると示すことができる.

定理 1.3. 長方形 $[a,b]\times[c,d]$ 上で二重積分可能な 2 変数関数 $f(x,y)$ について，

$$F_1(y)=\underline{\int_a^b}f(x,y)\mathrm{d}x$$
$$F_2(y)=\overline{\int_a^b}f(x,y)\mathrm{d}x$$

は $[c,d]$ 上で積分可能であり，

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_c^d F_1(y)\mathrm{d}y=\int_c^d F_2(y)\mathrm{d}y$$

が成り立つ．ただし，$\underline{\int_a^b}f(x,y)\mathrm{d}x$ は 1 変数の下積分，$\overline{\int_a^b}f(x,y)\mathrm{d}x$ は 1 変数の上積分であり，これらは 2 変数の場合と同様に定義される.

Proof. 次の不等式を示すことができれば,「二重積分可能」と「上積分と下積分は一致」が同値であることから定理の主張が従う.

$$\underline{\iint}_{[a,b]\times[c,d]}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\le\underline{\int_c^d}F_1(y)\mathrm{d}y\le\overline{\int_c^d}F_1(y)\mathrm{d}y\le\overline{\int_c^d}F_2(y)\mathrm{d}y\le\overline{\iint}_{[a,b]\times[c,d]}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

中央部分の不等式

$$\underline{\int_c^d} F_1(y)\mathrm{d}y \leq \overline{\int_c^d} F_1(y)\mathrm{d}y \leq \overline{\int_c^d} F_2(y)\mathrm{d}y$$

については，上積分は定義より下積分以上であることと，任意の y について $F_1(y) \leq F_2(y)$ であることから成立する（確認問題 2-a の 1 変数版を用いる）．残りの不等式を確かめよう．

まず，

$$\underline{\iint_{[a,b]\times[c,d]}} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leq \underline{\int_c^d} F_1(y)\mathrm{d}y$$

を確かめる．$\Delta = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ を $[a,b]$ の分割，$\Delta' = \{y_0, y_1, \cdots, y_m\}$ を $[c,d]$ の分割とし，これらを合わせて $[a,b]\times[c,d]$ の分割 Δ'' を作る．これについての不足和を

$$s_{\Delta''} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m m_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$

とする．

$y \in [y_{j-1}, y_j]$ とする．$m_i(\phi_y)$ を $[x_{i-1}, x_i]$ での $\phi_y(x) = f(x,y)$ の下限とすれば，下積分の定義により

$$\sum_{i=1}^n m_i(\phi_y)(x_i - x_{i-1}) \leq F_1(y) = \underline{\int_a^b} \phi_y(x)\mathrm{d}x$$

である．（左辺は分割 Δ についての ϕ_y の不足和．一方，分割全体について不足和の上限を取ったものが下積分である．）一方，$m_{ij} \leq m_i(\phi_y)$ なので

$$\sum_{i=1}^n m_{ij}(x_i - x_{i-1}) \leq F_1(y)$$

という不等式を得る．

よって，$y \in [y_{j-1}, y_j]$ での $F_1(y)$ の下限を $m_j(F_1)$ とおくと

$$\sum_{i=1}^n m_{ij}(x_i - x_{i-1}) \leq m_j(F_1)$$

なので

$$\sum_{j=1}^m \left(\sum_{i=1}^n m_{ij}(x_i - x_{i-1}) \right)(y_j - y_{j-1}) \leq \sum_{j=1}^m m_j(F_1)(y_j - y_{j-1}) \leq \underline{\int_c^d} F_1(y)\mathrm{d}y$$

となる．これにより，分割についての上限を取れば

$$\underline{\iint_{[a,b]\times[c,d]}} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leq \underline{\int_c^d} F_1(y)\mathrm{d}y$$

であることがわかる．

もう一方の不等式も同様に示せる． □

2　累次積分についての注意

結局二重積分は累次積分で（だいたい）書けるのだから，累次積分の方を 2 次元の積分の定義にしても良いのではないか，と思うかもしれない．しかし，実は二重積分のほうが簡単である．そもそも，積分はリーマン和の極限を取ることで定義されるのだった．これに注目すると，二重積分は極限操作を一度しか使わないのに対し，累次積分では二度極限を取らなければならないという差がある．それゆえ累次積分の方が複雑である．

また，累次積分が有用なのは手で積分値を求めるときに限られる．数値計算では極限を取ることができないので，積分の近似値を求めるときにはどうしても二重積分の方を使うことになる．