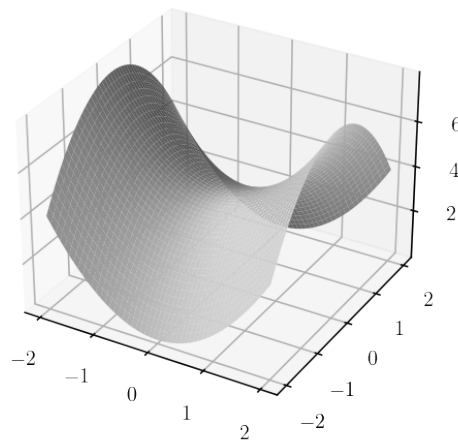


# 微分積分学 IV ・ 演習第 9 回

2021 年 11 月 16 日

## 問 9-1

$z = x^2 - y^2 + 4$  のグラフは次の図のようになる。



- (1)  $[-2, 2] \times [-2, 2]$  において  $x^2 - y^2 + 4 \geq 0$  を示せ.
- (2) 立体  $\{(x, y, z) \mid -2 \leq x \leq 2, -2 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq x^2 - y^2 + 4\}$  の体積を求めよ.

## 問 9-2

常に  $f(x) \geq 0$  であるとき,  $\{(x, y) \mid a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$  を  $x$  軸を中心に回転させてできる立体 (回転体) の体積  $V$  は

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$$

であることを証明したい (この公式自体は高校の教科書にも載っている).

- (1) この回転体の上半分を  $z = g(x, y)$  と表すとき,  $g(x, y)$  を求めよ. (ヒント:  $y$ - $z$  平面に並行な平面で回転体を切断したとき, それはどのような形になるか?)
- (2) 積分を行う領域  $D$  を適切に選び,

$$\int_D g(x, y) dx dy$$

を計算することで

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$$

を証明せよ.

### 問 9-3

以下のそれぞれについて体積を求めよ.

- (1) 立体  $\{(x, y, z) \mid -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq x^2 + y^2\}$ .
- (2) 立体  $\{(x, y, z) \mid 0 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2\}$ .
- (3)  $\{(x, y) \mid 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \sin(x)\}$  を  $x$  軸を中心に回転させてできる立体.
- (4)  $\{(x, y) \mid 0 \leq y \leq x \leq 1\}$  を  $x$  軸を中心に回転させてできる立体.