

# 微分積分学 IV ・ 演習第 8 回

2021 年 11 月 9 日

## 問 8-1

$D = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 1\}$  とする.

- (1) 領域  $D$  を図示せよ.
- (2)  $D_n = [-n, n] \times [0, 1]$  を  $n = 2, 3$  について図示せよ.
- (3)  $D_n$  上での積分値を求めることで

$$\iint_D \frac{y}{1+x^2} dx dy$$

を計算せよ.

## 問 8-2

広義積分

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-\sqrt{x^2+y^2}} dx dy$$

について考える.

- (1) 自然数  $n$  に対して  $D_n = \{(x, y) \mid 0 \leq x^2 + y^2 \leq n\}$  とするとき,

$$\iint_{D_n} e^{-\sqrt{x^2+y^2}} dx dy$$

を求めよ.

- (2)  $\lim_{t \rightarrow \infty} t e^{-t} = 0$  を示せ. (ヒント: ロピタルの定理を用いる.)
- (3) 以上の結果を用いて

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-\sqrt{x^2+y^2}} dx dy$$

を求めよ.

### 問 8-3

以下のそれぞれについて二重積分を計算せよ.

(1)

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{dx dy}{(1+x^2)(1+y^2)}$$

(2)

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{dx dy}{(1+x^2+9y^2)^2}$$

(3)  $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \geq 1\}$  のとき

$$\iint_D \frac{e^{-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}}}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} dx dy$$

(4)  $D = \{(x, y) \mid 1 \leq y \leq 4\}$  のとき

$$\iint_D x^2 e^{-x^2 y} dx dy$$

### 確認問題 8-a

$a, b > 0$  のとき 2 重積分

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(a^2 x^2 + b^2 y^2)} dx dy$$

を求めよ.

### 確認問題 8-b

2 重積分

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{(1+x^2+y^2)^\alpha} dx dy$$

はどのような  $\alpha > 0$  について有限の値になるか?

(講義ノートによれば  $\alpha = 2$  では有限の値になる. 他の  $\alpha$  の値ではどうか?)