微分積分学 IV・演習第 7 回

2021 年 11 月 2 日

問 7-1

$D = \{(x, y) \mid 0 \le x^2 \le y \le 1\}$ とする.

(1) 領域 D を図示せよ.

(2) D 上の点のうち，関数 $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{y - x^2}}$ が不連続になる部分はどこか？

(3) $D_n = \{(x, y) \mid 0 \le x^2 + \frac{1}{n} \le y \le 1\}$ を $n = 2, 3$ について図示せよ.

(4) D_n 上での積分値を求めることで

$$\iint_D \frac{1}{\sqrt{y - x^2}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

を計算せよ．ただし，

$$I_n = \int_0^{\sqrt{1-\frac{1}{n}}} \sqrt{1 - x^2}\, \mathrm{d}x$$

について $\lim_{n\to\infty} I_n = \frac{\pi}{4}$ であることは用いて良い (このことは $y = \sqrt{1 - x^2}$ のグラフを書いてみれば確認できるだろう).

問 7-2

$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le 1\}$ とするとき，

$$\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

を求めたい．被積分関数は原点で不連続なので，広義積分が必要である.

(1) 自然数 n に対して $D_n = \{(x, y) \mid \frac{1}{n} \le x^2 + y^2 \le 1\}$ とするとき，

$$\iint_{D_n} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

を求めよ.

(2) 前問の結果を用いて

$$\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

を求めよ.

問 7-3

以下のそれぞれについて二重積分を計算せよ.

(1) $D_1 = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq 1\}$ のとき

$$\iint_D \left(-\log(x^2+y^2)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

(2) $D_2 = \{(x,y) \mid 4x^2+9y^2 \leq 1\}$ のとき

$$\iint_{D_2} \frac{1}{\sqrt{1-4x^2-9y^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

(3) $D_3 = [-1,1]\times[-1,1]$ のとき

$$\iint_{D_3} \frac{1}{\sqrt{|x-y|}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

確認問題 7-a

$D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq 1\}$ とする．$F(r)$ が $[0,1]$ 上で微分可能な一変数関数であるとき，

$$\iint_D \frac{F'(\sqrt{x^2+y^2})}{\sqrt{x^2+y^2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

を求めよ.

確認問題 7-b

$D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq 1\}$, $\alpha > 0$ とするとき，2 重積分

$$\iint_D \frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

はどのような α について有限の値になるか？

（問 7-2 によれば $\alpha = \frac{1}{2}$ では有限の値になる．他の α の値ではどうか？）