

微分積分学 IV ・ 演習第 5 回

2021 年 10 月 19 日

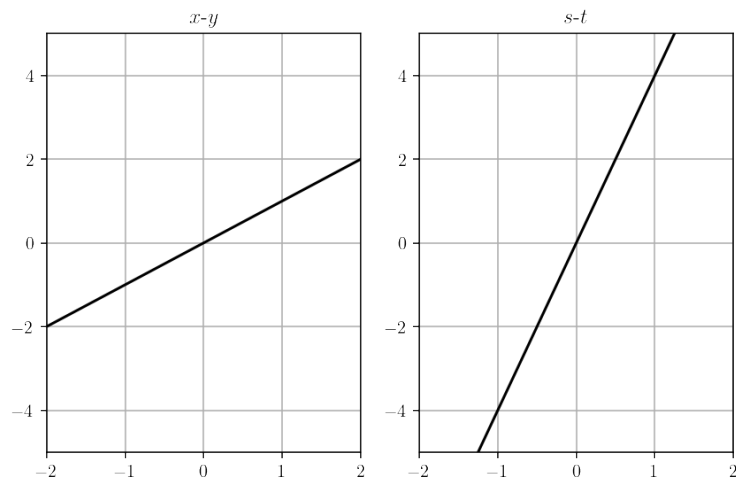
問 5-1

座標変換

$$x = 2s$$

$$y = \frac{t}{2}$$

を考える．この変換のもとで，例えば直線 $y = x$ は $t = 4s$ に移る（下図を参照）．



- (1) $x-y$ 座標系での曲線 $y = x^2$ を $s-t$ 座標系に変換するとき，その変換後の表示を求め，これを図示して元の曲線と比較せよ．
- (2) $x-y$ 座標系での長方形 $R = [0, 1] \times [0, 1]$ を $s-t$ 座標系に変換したとき，どのような図形になるかを図示せよ．また，元の長方形と面積を比較せよ．
- (3) 一般に， $x-y$ 座標系での図形 $D \subset \mathbb{R}^2$ を $s-t$ 座標系に変換すると，その面積は元と比べてどうなるか？予想を述べ，それを証明せよ．

問 5-2

$a > b > 0$ とするとき、長軸の長さが $2a$ 、短軸の長さが $2b$ となる楕円 E の面積は πab であることを、以下の手順で証明せよ。

(1) 座標変換

$$\begin{aligned}x &= as \\y &= bt\end{aligned}$$

により x - y 座標系にある楕円 E を s - t 座標系に変換する。このとき、 E は s - t 座標系のどのような図形にうつるか？

(2) 2重積分の座標変換の公式を用いて、楕円 E の面積は πab であることを示せ。

問 5-3

$D = \{(x, y) \mid 0 \leq x + y \leq 1 \text{ かつ } 0 \leq 3x + 5y \leq 1\}$ のとき

$$\iint_D (x + y)^3 (3x + 5y)^5 dx dy$$

の値を以下の手順で求めよ。

(1) D を $[0, 1] \times [0, 1]$ にうつす座標変換 $x = \phi(s, t)$, $y = \psi(s, t)$ を 1 つ求めよ。

(2) 2重積分の座標変換の公式を用いて積分の値を求めよ。

確認問題 5-a

$D = \{(x, y) \mid 0 \leq 2x - y \leq \pi \text{ かつ } 0 \leq x + 2y \leq 2\}$ のとき

$$\iint_D (x + 2y)^3 \sin(2x - y) dx dy$$

の値を求めよ。

確認問題 5-b

$D = \{(x, y) \mid 0 \leq 3x + 4y \leq 2 \text{ かつ } -2 \leq 2x + 3y \leq 0\}$ のとき

$$\iint_D (3x + 4y - 1)^4 (2x + 3y + 1)^6 dx dy$$

の値を求めよ。