

微分積分学 IV ・ 演習第 4 回

2021 年 10 月 12 日

問 4-1

以下の二重積分を計算せよ.

- (1) $\iint_{[0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \pi]} \cos(x) \sin(y) dx dy$
(2) $\iint_{[0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \pi]} \cos(x+y) \sin(y) dx dy$

問 4-2

以下のそれぞれについて積分を行う領域を図示し, 二重積分を計算せよ.

- (1) $D_1 = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1 \text{ かつ } 0 \leq y \leq e^x\}$ のとき

$$\iint_{D_1} xy \, dx dy$$

- (2) $D_2 = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq x^3 \leq 1\}$ のとき

$$\iint_{D_2} xy \, dx dy$$

- (3) $D_3 = \{(x, y) \mid 0 \leq |x| + |y| \leq 2\}$ のとき

$$\iint_{D_3} e^{x+y} \, dx dy$$

問 4-3

$a > b > 0$ とするとき, 長軸の長さが $2a$, 短軸の長さが $2b$ となる楕円の面積は πab であることを証明せよ.

確認問題 4-a

$D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq y \leq 1\}$ とする. 領域 D を図示し,

$$\iint_D \frac{dx dy}{(1+x+y)^2}$$

を計算せよ.

確認問題 4-b

n を自然数とするとき, $(x+y)^n$ の $[0, 1] \times [0, 1]$ における積分を考えることで

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{1}{(n-k+1)(k+1)} = \frac{2^{n+2} - 2}{(n+1)(n+2)}$$

であることを示せ. ただし

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

は二項係数である.