微分積分学 IV・演習第 3 回

2021 年 10 月 5 日

問 3-1

積分ができない関数の例について考える．関数 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ を

$$f(x,y)=\begin{cases}1 & (x \text{ が有理数であるとき})\\ 0 & (\text{それ以外})\end{cases}$$

で定める．例えば $f(0,1)=1$, $f(\sqrt{2},1)=0$ である．長方形 R を $[0,1]\times[0,1]$ と定める．

(1) 任意の長方形 $D=[a,b]\times[c,d]$ について，$\sup_{(x,y)\in D} f(x,y)=1$, $\inf_{(x,y)\in D} f(x,y)=0$ を示せ．（ヒント：任意の閉区間は有理数と無理数を両方含む．）

(2) Δ を R の分割とするとき，過剰和 S_Δ，不足和 s_Δ を求めよ．

(3) R 上で $f(x,y)$ は積分不可能であることを示せ．

問 3-2

$R=[1,2]\times[0,1]$ とするとき，

$$\iint_R xe^{xy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

を求めよ．

問 3-3

領域 D を $D=\{(x,y)\mid y^2\le x\le 1\}$ で定める．

(1) 領域 D を図示せよ．

(2) 第 2 回講義ノートの定理 1.2 を用いて，$\iint_D xy^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ を求めよ．

確認問題 3-a

連続関数 $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ と $g:[c,d]\to\mathbb{R}$ について，関数 $h(x,y)=f(x)g(y)$ は $[a,b]\times[c,d]$ 上で積分可能であり，

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} h(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)\left(\int_c^d g(y)\mathrm{d}y\right)$$

が成り立つことを示せ．（ヒント：連続関数の積は連続関数になる．また $h(t)$ が連続関数のとき，任意の $\alpha\in\mathbb{R}$ について

$$\int \alpha h(t)\mathrm{d}t=\alpha\int h(t)\mathrm{d}t$$

が成り立つ．）

確認問題 3-b

以下の問いに答えよ．

(1) $\alpha>0$ のとき，

$$\int x\tan^{-1}\left(\frac{\alpha}{x}\right)\mathrm{d}x$$

を求めよ．ただし $\tan^{-1}$ は $\tan$ の逆関数である．

(2) 二重積分

$$\iint_{[1,2]\times[1,2]}\frac{x^2}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

を求めよ．

(3) あることに気づくと上の二重積分の値はすぐに求められる．どのように考えれば良いか？