微分積分学 IV・演習第 2 回

2021 年 9 月 28 日

問 2-1

関数 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を

$$f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$$

で定めるとき以下の問いに答えよ.

(1) $f(x,y)$ は $\mathbb{R}^2$ 上で有界であることを示せ.

(2) $\displaystyle\sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y)$ と $\displaystyle\inf_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y)$ を求めよ.

問 2-2

長方形 $R = [0,1] \times [2,3]$ を考える.

(1) R を図示せよ.

(2) R の分割 Δ で幅が 1/2 以下のものを一つ構成し，図示せよ.

(3) (2) で構成した Δ の細分の例を一つあげ，図示せよ.

問 2-3

関数 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を

$$f(x,y) = xy$$

で定めるとき以下の問いに答えよ.

(1) $a, c \geq 0$ のとき，長方形 $[a,b] \times [c,d]$ における f の上限と下限を求めよ.

(2) 長方形 $R=[0,1]\times[0,1]$ の分割 Δ_N を，x 軸と y 軸についての N 等分で構成する．代表点を選んで f の Δ_N に関するリーマン和の例を一つ構成せよ．

(3) Δ_N についての f の不足和，過剰和を求めよ．

(4) 以上の結果を用いて $\iint_R f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ を求めよ．（ヒント：第一回講義ノートの定理 2.7 とその証明により，上積分と下積分の値が等しければ $f(x,y)$ は積分可能で積分値は上積分の値に等しいことを用いる）.

確認問題 2-a

長方形 $[a,b]\times[c,d]$ 上の有界関数 $f(x,y)$ と $g(x,y)$ について，つねに $f(x,y)\le g(x,y)$ であれば

$$\overline{\iint_R} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \le \overline{\iint_R} g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\ \underline{\iint_R} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \le \underline{\iint_R} g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

であることを示せ．

確認問題 2-b

長方形 $R=[a,b]\times[c,d]$ 上で有界な関数 $f(x,y)$，$g(x,y)$ が R 上で積分可能であるとき，$h(x,y)=f(x,y)+g(x,y)$ も R 上で積分可能であり，

$$\iint_R h(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_R f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_R g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

であることを示せ．ただし，

$$\begin{aligned}\overline{\iint_R} h(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y &\le \overline{\iint_R} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \overline{\iint_R} g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ \underline{\iint_R} h(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y &\ge \underline{\iint_R} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \underline{\iint_R} g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{aligned}$$

であることは用いて良い．