微分積分学 IV・演習第 13 回

2021 年 12 月 21 日

問 13-1

以下のべき級数のそれぞれについて，収束半径を求めよ．

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$
(2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} x^n$
(3) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{1+n^2}$
(4) $\sum_{n=0}^{\infty} n x^n$

問 13-2

多項式

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

のテイラー展開を導出する．

(1) 実数 x_0 を一つ固定して等式

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k (x - x_0)^k \tag{1}$$

により b_k を定めるとき,

$$b_0 = f(x_0)$$

であることを示せ．（ヒント：右辺を展開して示すのは良い方針ではない．）

(2) $f^{(k)}$ を f の k 階微分として

$$b_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$$

であることを示せ．（ヒント：式 (1) の両辺を微分．）

問 13-3

以下の関数のそれぞれについて，$x=0$ でのテイラー展開を求めよ．また，得られたべき級数の収束半径はどうなるか？

(1) e^x（ヒント：$(e^x)'=e^x$ を用いる．）
(2) $\cos(x)$
(3) $\sin(x)$
(4) $\frac{1}{1+x}$
(5) $\frac{1}{1+x^2}$ （ヒント：$f(g(x))$ のテイラー展開は $f(x)$ の展開に $g(x)$ を代入して計算できる．）
(6) xe^{x^2}

確認問題 13-a

以下のべき級数のそれぞれについて，収束半径を求めよ．

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$
(2) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^3 x^n}{(3n)!}$
(3) $\sum_{n=0}^{\infty} (-2)^n x^n$

確認問題 13-b

以下の関数のそれぞれについて，$x=0$ でのテイラー展開を求めよ．また，得られたべき級数の収束半径はどうなるか？

(1) e^{3x}
(2) $\cos(x^2)$
(3) $\frac{1}{1+3x^2}$