微分積分学 IV・演習第 12 回

2021 年 12 月 14 日

問 12-1

以下の級数はそれぞれ次のうちどれに該当するか，理由もあわせて答えよ．
(a) 正項級数 (b) 交代級数 (c) 収束級数 (d) 絶対収束級数 (e) 条件収束級数
(例えば $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ は (a), (c), (d) に該当する．)

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$
5. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{n \log n}$
6. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{n^2}$
7. $\sum_{n=1}^{\infty} n \sin\left(\frac{1}{n}\right)$
8. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n^{\frac{1}{n}}$

問 12-2

級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n} + \cdots$$

を考える．

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は条件収束することを示せ．

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の正の項全体の和，負の項全体の和が発散することを用いて，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の項を並び替えて π に収束するようにできることを示せ．（ヒント：目標値を超えるまで正の項を足し，そのあと負の項を少しだけ足す．）

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の項を並び替えて発散するようにできることを示せ．

確認問題 12-a

以下の級数はそれぞれ次のうちどれに該当するか，理由もあわせて答えよ．
(a) 正項級数 (b) 交代級数 (c) 収束級数 (d) 絶対収束級数 (e) 条件収束級数

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n)}{n!}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$

確認問題 12-b

級数

$$Z(x) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx}$$

を考える．

(1) $Z(x)$ はどのような x について収束するか．

(2) $Z(x_0)$ が収束するとき，$Z(x)$ は関数として $x = x_0$ で連続であることを示せ．（ヒント：$|Z(x_0 + h) - Z(x_0)|$ を考える．）