微分積分学 IV・演習第 11 回

2021 年 12 月 7 日

問 11-1

積分を用いて級数の収束・発散を判定する方法を**積分判定法**と呼ぶ.

(1) 関数 $h(x)$ を

$$h(x) = \frac{1}{n} \quad (n \leq x < n+1 \text{ のとき})$$

で定めるとき，$1 \leq x \leq 4$ について $y = h(x)$ のグラフを書け．また，$y = \frac{1}{x}$ のグラフと比較せよ.

(2) 自然数 $n \geq 1$ について

$$\int_n^{n+1} \frac{dx}{x} \leq \frac{1}{n}$$

を示せ.

(3) (1), (2) の結果を用いて $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ が発散することを示せ.

問 11-2

この問題ではダランベールの判定法を証明する．正項級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ について,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = r < 1$$

であったとする.

(1) ある N が存在して $n \geq N$ のとき

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{1+r}{2} < 1$$

であることを示せ.（ヒント：$\frac{1-r}{2} > 0$. また収束性より $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n} - r\right|$ はいくらでも 0 に近づけられる．)

(2) (1) の N について，$n \geq N$ のとき

$$a_n \leq \left(\frac{1+r}{2}\right)^{n-N} a_N$$

であることを示せ.

(3) (2) の結果を用いて $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束することを証明せよ.

問 11-3

次の級数の収束・発散を判定し，その証明を行え.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n}{n^2}$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1.207}}$
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \log n}$
4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n}$（ヒント：ダランベールの判定法.）
5. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

確認問題 11-a

$\alpha > 0$ に対し，

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$$

の収束・発散を判定せよ.（問 11-1 によれば $\alpha = 1$ のときは発散である．それ以外の場合はどうか？）

確認問題 11-b

(1) 任意の実数 x に対し，級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

は収束することを示せ.

(2) 級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

はどのような x について収束するか？