微分積分学 IV・演習第 10 回

2021 年 11 月 30 日

問 10-1

公比 r の等比級数

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k$$

について，$0 < r < 1$ のとき級数は収束することを示そう．

(1) 部分和

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} r^k$$

を求めよ．

(2)

$$R_n = \frac{1}{1-r} - S_n$$

を求めよ．

(3) $r = \frac{1}{2}$ のとき，$R_n < \frac{1}{32}$ となるために n はどの程度大きくなければならないか．

(4) $0 < r < 1$ とする．任意の $\varepsilon > 0$ に対し，ある N が存在して $n > N$ のとき $R_n < \varepsilon$ となることを示せ．

問 10-2

級数

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$$

は調和級数と呼ばれる．

(1) $n = 0, 1, 2 \cdots$ のとき,

$$\sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} \frac{1}{k} \geq \frac{1}{2}$$

を示せ.

(2) (1) の結果を用いて，調和級数が発散することを示せ.

問 10-3

平方数の逆数すべての和

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots$$

について考える.

(1) $n = 2, 3, \cdots$ のとき,

$$\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

を示せ.

(2) (1) の結果を用いて，平方数の逆数すべての和は収束することを示せ.

問 10-4

級数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ が収束するとき，$\lim_{k\to\infty} a_k = 0$ であることを示せ.

確認問題 10-a

次の級数の収束・発散を判定し，その証明を行え.

(1) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k}$.

(2) $0 \leq x < 1$ のとき $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$.

(3) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \log k}$. （ヒント：問 10-2）

確認問題 10-b

$\lim_{k\to\infty} a_k = 0$ であるとき級数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ は収束するか．正しければ証明し，誤りであれば反例を挙げよ.