微分積分学 IV・演習第 1 回

2021 年 9 月 21 日

概念の定義などについては配布した補足資料や教科書等を参照.

問 1-1

実数 a, b について以下は同値であることを示せ.

1. $a = b$.
2. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $a < b + \varepsilon$ と $b < a + \varepsilon$ が成り立つ.

問 1-2

$A, B \subset \mathbb{R}$ を有界集合とする．集合 $A + B$ を

$$A + B = \{x + y \mid x \in A \text{ かつ } y \in B\}$$

で定めるとき次を示せ.

(1) $A + B$ は有界集合.
(2) $\sup(A + B) \leq \sup A + \sup B$.
(3) $\inf A + \inf B \leq \inf(A + B)$.

問 1-3

集合 $A \subset \mathbb{R}$ について以下は同値であることを示せ.

- $\alpha = \sup A$.
- $\alpha \in \mathbb{R}$ は A の上界．さらに任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $y \in A$ が存在して $\alpha - \varepsilon \leq y$ となる.

問 1-4

関数 $f(x) = x^2$ について以下のことを示せ.

(1) $f(x)$ は閉区間 $[0,1] = \{x \mid 0 \leq x \leq 1\}$ 上で一様連続である.（ヒント：$x, y \in [0,1]$ のとき $|x+y| \leq 2$）.

(2) $f(x)$ は $\mathbb{R}$ 上で連続だが一様連続ではない.

問 1-5

数列 a_n を

$$a_n = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}$$

で定める. 以下のことを示せ.

(1) $n \geq 2$ のとき不等式

$$\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

が成り立つ.

(2) 極限 $\lim_{n\to\infty} a_n$ は存在する.

確認問題 1-a

任意の点 $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$ について以下は同値であることを示せ.

1. 関数 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ が $\mathbf{a}$ において連続である.
2. $\mathbb{R}^2$ の任意の点列 $\{\mathbf{a}_n\}_{n=1}^{\infty}$ について，$\lim_{n\to\infty} \mathbf{a}_n = \mathbf{a}$ ならば $\lim_{n\to\infty} f(\mathbf{a}_n) = f(\mathbf{a})$.

確認問題 1-b

実数 $a < b$, $c < d$ に対し長方形 R を

$$R = [a,b] \times [c,d] = \{(x,y) \mid a \leq x \leq b \text{ かつ } c \leq y \leq d\}$$

で定める. このとき，R は有界閉集合であることを示せ.