実解析第２同演習・演習第９回

2022 年 12 月 23 日

問 A-1

$X = \{1, 2, 3\}$ とする．X 上の関数 f, g を

$$
\begin{aligned}
f(1) &= g(1) = 1 \\
f(2) &= g(2) = 2 \\
f(3) &= 3,\ g(3) = 2
\end{aligned}
$$

で定める．

(1) $(X, \mathcal{P}(X))$ 上の測度 μ を

$$\mu(\{1\}) := 1,\ \mu(\{2\})\ = 1,\ \mu(\{3\}) := 0$$

で定義する．このとき，$1 \leq p < \infty$ について $L^p(X, \mathcal{P}(X), \mu)$ の元として $f = g$ であることを示せ．

(2) $(X, \mathcal{P}(X))$ 上の測度 ν を

$$\nu(\{1\}) := 1,\ \nu(\{2\})\ = 1,\ \nu(\{3\}) := 1$$

で定義する．このとき，$1 \leq p < \infty$ について $N^p := \{f \in \mathcal{L}^p(X) \mid \|f\|_{L^p} = 0\} = \{0\}$ であることを示せ．

問 A-2

関数 $f \in L^p([0, 1])$（$1 \leq p < \infty$）を

$$f(x) = x$$

と定義するとき，$\|f\|_{L^p}$ を求めよ．

問 A-3

$(X, \mathcal{M}, \mu)$ を測度空間とする．可測関数 $f : X \to \mathbb{R}$ の本質的上限とは，

$$\operatorname{ess\,sup} f := \inf\{\alpha \mid \mu(\{f > \alpha\}) = 0\}$$

で定義される量である．$\mathcal{L}^\infty(X, \mathcal{M}, \mu) := \{f \mid \operatorname{ess\,sup} f < \infty\}$ とすると，

$$\|f\|_{L^\infty} := \operatorname{ess\,sup} f$$

と定めれば，$p < \infty$ のときの L^p 空間と同様の方法でノルム空間 $L^\infty(X, \mathcal{M}, \mu)$ が得られることを確かめよ．

問 B-1

$(X, \mathcal{M}, \mu)$ を有限測度空間とする．

1. $\mathcal{B} \subset \mathcal{M}$ が σ-algebra のとき，$L^p(X, \mathcal{B}, \mu)$ は $L^p(X, \mathcal{M}, \mu)$ の線形部分空間であることを示せ．
2. $f \in L^2(X, \mathcal{M}, \mu)$ に対し，$\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を

$$\phi(t) := \int_X (f(x) - t)^2 \mathrm{d}\mu$$

   で定めるとき，$\phi(t)$ を最小にする t を求めよ．
3. $f \in L^2(X, \mathcal{M}, \mu)$ に対し，$g \in L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$ で $\|f - g\|_{L^2}$ が最小となるものを求めよ．（ヒント：演習第 7 回問 B-2 と同様の方法で f から $\mathcal{B}$-可測関数を構成できる．）

問 B-2

$X = \{1, 2, \cdots, n\}$ とする．ν を X 上の counting measure，すなわち各 $E \in \mathcal{P}(X)$ に対して $\nu(E) := \#E$ で定義される測度とする．このとき，以下を示せ．

(1) 任意の $x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbb{R}$ と $1 \leq p < \infty$ について次の不等式が成り立つ．

$$\max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} \leq n^{1/p} \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

(2) $f \in L^\infty(X, \mathcal{P}(X), \nu)$ ならば $\|f\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |f(i)|$ である．

(3) $\phi : L^\infty(X, \mathcal{P}(X), \nu) \to \mathbb{R}^n$ を $\phi(f) := (f(1), f(2), \cdots, f(n))$ と定義すると ϕ は連続な全単射線型写像であり，逆写像も連続である．ただし，$\mathbb{R}^n$ には通常の距離から定まる位相を入れる．

(4) 集合として $L^p(X, \mathcal{P}(X), \nu) = L^\infty(X, \mathcal{P}(X), \nu)$ である．また恒等写像 $\mathrm{id} : L^p(X, \mathcal{P}(X), \nu) \to L^\infty(X, \mathcal{P}(X), \nu)$ は連続な全単射線型写像であり，逆写像も連続である．

以上により，$1 \leq p \leq \infty$ について $L^p(X, \mathcal{P}(X), \nu)$ は $\mathbb{R}^n$ と同一視できることが分かった．