実解析第2同演習・演習第8回

2022年12月16日

問 A-1

(1) 関数 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ が単調関数であれば有界変動であることを示せ.

(2) 関数 $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ が Lipschitz 連続であれば有界変動であることを示せ.

問 A-2

$(X, \mathcal{M}, \mu)$ を測度空間とする．可積分関数 f, $g : X \to \mathbb{R}$ が任意の $E \in \mathcal{M}$ に対し

$$\int_E f \, \mathrm{d}\mu = \int_E g \, \mathrm{d}\mu$$

を満たすとき，$f = g$ (μ-a.e.) であることを示せ.

問 A-3

(1) 関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が可積分であれば局所可積分であることを示せ.

(2) 局所可積分であるが可積分でない関数の例をあげよ.

問 B-1

区間 $I = [a, b]$ 上の単調関数はほとんど至るところ微分可能であることを用いて，I 上の有界変動関数はほとんど至るところ微分可能であることを示せ.

問 B-2

関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ が絶対連続であるとは，任意の $\epsilon>0$ に対して $\delta>0$ が存在し，任意の互いに素な有限個の区間 (x_i,y_i) $(i=1,2,\cdots,N)$ について

$$\sum_{i=1}^{N}|x_i-y_i|<\delta$$

ならば

$$\sum_{i=1}^{N}|f(y_i)-f(x_i)|<\epsilon$$

となることをいう．関数 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ が絶対連続であれば，任意の有界区間 $[a,b]$ 上で有界変動であることを示せ.

問 C-1

実数 t_0,a,y_0,b と関数 $f:[t_0-a,t_0+a]\times[y_0-b,y_0+b]\to\mathbb{R}$ に対し, (t_0,y_0) における常微分方程式の初期値問題とは，絶対連続関数 $\phi:[t_0,t_0+r]\to\mathbb{R}$ で，$\phi(t_0)=y_0$ であり，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\phi(t)=f(t,\phi(t))$$

をほとんど至るところでみたすものを見つける問題である（ただし $r<b$）．関数 $f:[t_0-a,t_0+a]\times[y_0-b,y_0+b]\to\mathbb{R}$ が次の条件を満たすとき，解が存在することを示せ（これは Carathéodry の存在定理と呼ばれる）.

- $f(t,-):[y_0-b,y_0+b]\to\mathbb{R}$ は各 t に対し連続.
- $f(-,y):[t_0-a,t_0+a]\to\mathbb{R}$ は各 y に対し可測.
- ある Lebesgue 可積分関数 $m:[t_0-a,t_0+a]\to[0,\infty)$ が存在し，全ての (t,y) に対し $|f(t,y)|\leq m(t)$.

（ヒント：まず任意の可測関数 $\phi:[t_0-a,t_0+a]\to[y_0-b,y_0+b]$ について $f(t,\phi(t))$ は可積分であることを示す．つぎに $r>0$ として，$r\leq a$ かつ

$$\int_{t_0}^{t_0+r}m(t)\mathrm{d}t\leq b$$

をみたすものをとる．この r を用い，各 $k\in\mathbb{N}$ に対し，$h:=r/k$ とおいて

$$\phi_k(t):=\begin{cases}y_0 & t\leq t_0\\ y_0+\int_{t_0}^{t}f(s,\phi_k(s-h))\mathrm{d}s & t_0<t\leq t_0+r\end{cases}$$

により定義される関数 $\phi_k:[t_0-h,t_0+r]\to\mathbb{R}$ を考える．関数列 $\phi_k:[t_0,t_0+r]\to\mathbb{R}$ に Ascoli-Arzelà の定理を適用せよ.）