実解析第2同演習・演習第5回

2022 年 11 月 11 日

問 A-1

Lebesgue 可積分関数 $f, g : (0, 1] \to \mathbb{R}$ の組で，積 fg が可積分にならない例をあげよ．（ヒント：$(0, 1]$ 上で積分して値が有限にならない関数にはどのようなものがあるか？）

問 A-2

実数 $r \geq 1$ に対し，

$$\int_0^\infty \frac{e^{-y} - e^{-ry}}{y} \mathrm{d}y$$

を求めよ．

問 A-3

σ-有限測度空間 $(X, \mathcal{F}, \mu)$ と $(Y, \mathcal{G}, \nu)$ を考える．任意の $A \in \mathcal{F} \otimes \mathcal{G}$ に対し，

$$(\mu \otimes \nu)(A) = \int_X \nu(A_x) \mathrm{d}\mu(x) = \int_Y \mu(A_y) \mathrm{d}\nu(y)$$

であることを示せ．ただし，

$$A_x = \{y \in Y \mid (x, y) \in A\}$$
$$A_y = \{x \in X \mid (x, y) \in A\}$$

と定義する．

問 B-1

$(X, \mathcal{F}, \mu)$ を測度空間とする．関数 $f : X \to \mathbb{R}$ が二乗可積分であるとは，$\int_X |f|^2 \mathrm{d}\mu(x) < \infty$ となることをいう．

(1) 二乗可積分関数の積は可積分であることを示せ．

(2) $\mu(X) < \infty$ のとき，二乗可積分関数は可積分であることを示せ．

(3) $\mu(X)$ が有限でないとき，二乗可積分だが可積分でない関数の例を示せ.

(4) 二乗可積分関数の積は二乗可積分とは限らないことを示せ.

問 B-2

関数 $f:(0,a)\to\mathbb{R}$ が Lebesgue 可積分のとき，関数 $g:(0,a)\to\mathbb{R}$ を

$$g(x) := \int_x^a \frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t$$

で定義すると g は Lebesgue 可積分であり，

$$\int_0^a f(t)\mathrm{d}t = \int_0^a g(x)\mathrm{d}x$$

となることを示せ.

（ヒント：一般に

$$\int_x^a h(t)\mathrm{d}t = \int_0^a h(t)1_{(x,a)}(t)\mathrm{d}t$$

である.）

問 B-3

n-単体 $\Delta^n := \{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^n \mid 0\le x_1\le x_2\le\cdots\le x_n\le 1\}$ について，その n 次元 Lebesgue 測度を以下の手順で求めよ.

(1) $m_{L^1}(\Delta^1)$，$m_{L^2}(\Delta^2)$，$m_{L^3}(\Delta^3)$ を求めよ.

(2) $A\subset\mathbb{R}^d$ と $r\ge 0$ に対し，$rA := \{(rx_1,\cdots,rx_d)\mid(x_1,\cdots,x_d)\in A\}$ と定義する．任意の $x_n\in[0,1]$ について，

$$\Delta^n_{x_n} := \{(y_1,y_2,\cdots,y_{n-1})\mid(y_1,y_2,\cdots,y_{n-1},x_n)\in\Delta^n\} = x_n\Delta^{n-1}$$

を示せ.

(3) $m_{L^n}(\Delta^n)$ を求めよ.（ヒント：Lebesgue 測度の性質 $m_{L^d}(rA) = r^d m_{L^d}(A)$ を用いる.）