実解析第2同演習・演習第4回

2022年11月4日

問 A-1

Lebesgue 可積分関数 $f, g : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ を考える．このとき，

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x)g(y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \left(\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_{\mathbb{R}} g(y)\,\mathrm{d}y\right)$$

となることを示せ.

問 A-2

$\displaystyle\int_0^\infty \int_0^\infty x e^{-x^2(1+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ を考えることにより，$\displaystyle\int_0^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ を示せ．（注意：積分の順序を変更する際には，そうできる理由を述べること．）

問 A-3

測度空間 $(X, \mathcal{M}, \mu)$ を $\mu(X) = 1$ となるもの（確率測度）とする．このとき，任意の非負値可測関数 $f : X \to [0, \infty)$ について

$$\int_X f\,\mathrm{d}\mu = \int_{[0,\infty)} \mu\left(\{x \in X \mid f(x) \geq \lambda\}\right)\,\mathrm{d}\lambda$$

であることを示せ．（$\mu\left(\{x \in X \mid f(x) \geq \lambda\}\right)$ が λ の関数として Lebesgue 可測であることは認めて良い．）

問 B-1

(1) 関数 $\frac{\sin x}{x}$ は $(0, \infty)$ において Lebesgue 可積分でないこと，すなわち

$$\int_0^\infty \frac{|\sin x|}{x}\mathrm{d}x = \infty$$

であることを示せ.

(2) 関数 $f(x,t) := e^{-tx}\sin x$ を用いて,

$$\lim_{M\to\infty}\int_0^M \frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$$

を示せ.

問 B-2

実数 $p, q > 0$ に対し，ベータ関数 $B(p,q)$ とガンマ関数 $\Gamma(p)$ は

$$B(p,q) := \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,\mathrm{d}x$$
$$\Gamma(p) := \int_0^\infty x^{p-1}e^{-x}\,\mathrm{d}x$$

によりそれぞれ定義される.

(1) $\Gamma(1) = 1$，$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ を示せ.

(2) $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < y\}$ とする．関数 $f(x,y) := \mathbf{1}_E(x,y)x^{p-1}(y-x)^{q-1}e^{-y}$ を $\mathbb{R}^2$ 上で積分することにより，$\Gamma(p)\Gamma(q) = \Gamma(p+q)B(p,q)$ を示せ．ただし $\mathbf{1}_E$ は E の定義関数である.

(3) 関数 $g(x,y) := \chi_E(x,y)px^{p-1}e^{-y}$ を $\mathbb{R}^2$ 上で積分することにより，$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p)$ を示せ．（すなわち，ガンマ関数は階乗の一般化.）

(4) $\displaystyle\int_0^\pi \sin^n(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n+2}{2})}\sqrt{\pi}$ を示せ．（ヒント：$\sin(x)$ の性質を用いて積分範囲を変更し，変数変換 $t = \sin^2(x)$ を考える．）

問 C-1

部分集合 $B \subset \mathbb{R}$ が Bernstein set であるとは，任意の非可算閉部分集合 $A \subset \mathbb{R}$ について，$B \cap A \neq \emptyset$ かつ $B^c \cap A \neq \emptyset$ となることである．このような集合が存在することは認めて，以下を示せ.

(1) Bernstein set は Lebesgue 可測ではない.

(2) 任意の Lebesgue 可測集合 A について，$m(A) > 0$ ならば A は可測でない部分集合を含む．ただし m は 1 次元 Lebesgue 測度である.