実解析第２同演習・演習第２回

2022 年 10 月 21 日

問 A-1

関数 $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ を $f(x)=x$ で定める．このとき，非負単関数の列 $\phi_n\ (n=1,2,\cdots)$ で $\phi_n\nearrow f$ となるもの，すなわち $\phi_n\le\phi_{n+1}\le f$ と $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\phi_n(x)=f(x)$ がほとんどいたるところで成り立つものを構成し，それを用いて $\int_{[0,1]}f\,\mathrm{d}x$ を求めよ．（ヒント：$[0,1]$ を 2^n 等分してみる．）

問 A-2

連続関数の列 $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$（$n=1,2,\cdots$）が次の条件をみたすとする．

1. 任意の n と $x\in[0,1]$ に対し $0\le f_n(x)\le 1$.
2. 任意の $x\in[0,1]$ に対し $\lim_{n\to\infty}f_n(x)=0$.

このとき

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x=0$$

を示せ．（ヒント：問題の内容自体はリーマン積分の範囲であるが，ルベーグ積分に関する結果を用いて示す．）

問 A-3

$X=\{1,2\}$, $Y=\{1,2,3\}$ とする．測度 $\mu:\mathcal{P}(X)\to[0,\infty)$ を $\mu(A):=\#A$（$\#A$ は A の元の個数)，測度 $\nu:\mathcal{P}(Y)\to[0,\infty)$ を

$$\nu(A)=\begin{cases}1 & (1\in A\text{ のとき})\\ 0 & (1\notin A\text{ のとき})\end{cases}$$

でそれぞれ定める．

(1) $(X,\mathcal{P}(X),\mu)$，$(Y,\mathcal{P}(Y),\nu)$ がそれぞれ測度空間であることを確かめよ．

(2) 関数 $f : X \to \mathbb{R}$ を $f(1) = 1$, $f(2) = 2$ で定めるとき，$\int_X f \mathrm{d}\mu$ を求めよ．（ヒント：例えば $\chi_{\{1\}}$ の積分がどうなるかを考える．）

(3) 関数 $g : Y \to \mathbb{R}$ を $g(1) = 1$, $g(2) = 2$, $g(3) = 3$ で定めるとき，$\int_Y g \mathrm{d}\nu$ を求めよ．

(4) $E := \{(1,1), (2,1), (2,2)\} \subset X \times Y$ について，$E = A \times B$ となる $A \in \mathcal{P}(X)$ と $B \in \mathcal{P}(Y)$ の組は存在しないことを確かめよ．（ヒント：$X \times Y$ の図を書いて考えるとよい．）

(5) 直積測度 $\mu \otimes \nu$ について，$(\mu \otimes \nu)(E)$ を求めよ．（ヒント：$A \in \mathcal{P}(X)$ と $B \in \mathcal{P}(Y)$ については $(\mu \otimes \nu)(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$．）

問 B-1

$(X, \mathcal{F})$ を可測空間とする．このとき任意の有界可測関数 $f : X \to [0, \infty)$ と $a \in X$ について，

$$\int_X f(x) \mathrm{d}\delta_a(x) = f(a)$$

であることを示せ．ただし δ_a はデルタ測度であり，

$$\delta_a(F) = \begin{cases} 1 & (a \in F) \\ 0 & (a \notin F) \end{cases}$$

と定義される．（ヒント：まずは f が単関数のときを考える．）

問 B-2

μ を $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ 上の測度で平行移動について不変なもの，すなわち任意の $x \in \mathbb{R}$ と $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ について

$$\mu(x + E) = \mu(E)$$

となるものとする．また，m を $\mathbb{R}$ の Lebesgue 測度とする．

(1) $\mathcal{A}$ を区間 $[a, b)$ で両端点が有理数であるもの全体からなる集合とする ($a = b$ のときは $[a, a) = \emptyset$ とみなす)．このとき，$\mathcal{A}$ は π-system であることを示せ．

(2) $\mu([0, 1)) = k < \infty$ のとき，任意の $[a, b) \in \mathcal{A}$ について，$\mu([a, b)) = km([a, b))$ となることを示せ．

(3) $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ であることを用いて，任意の $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ について $\mu(E) = km(E)$ となることを示せ．

以上により，Lebesgue 測度の特徴づけが得られた．すなわち，平行移動について不変な $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ 上の測度で，単位区間に値 1 を割り当てるものは Lebesgue 測度に限られる．