実解析第 2 同演習・演習第 12 回

2023 年 1 月 20 日

問 A-1

ノルム空間 X の点列 $\{x_n\}$ について以下は同値であることを示せ.

1. $\{x_n\}$ は Cauchy 列.
2. 0 に収束する実数列 $a_m \geq 0$ が存在し，任意の $n \geq m$ について $\|x_n - x_m\| \leq a_m$ となる.

問 A-2

以下を示せ.

(1) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し，$\phi_n(x) := \sqrt{2} \sin n\pi x \in L^2([0,1])$.

(2) 任意の $m, n \in \mathbb{N}$ に対し $\int_{[0,1]} \phi_n(x)\phi_m(x) \mathrm{d}x = \delta_{mn}$．ただし，$\delta_{mn}$ は Kronecker のデルタ

$$\delta_{mn} := \begin{cases} 1 & m = n \\ 0 & m \neq n \end{cases}$$

である.

問 A-3

内積空間 X において，任意の $x, y \in X$ に対し

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

であることを示せ（これは平行四辺形公式と呼ばれる）.

問 B-1

X を実 Hilbert 空間とする．$C \subset X$ が凸集合であるとは，任意の $x, y \in C$ と $\lambda \in [0,1]$ に対し

$$\lambda x + (1-\lambda)y \in C$$

となることである．閉凸集合 $C \subset X$ と $x \notin C$ に対し，以下を示せ．

(1) 点 x から C への最短距離

$$d(x, C) := \inf_{y \in C} \|y - x\|$$

は有限値に定まる．また，$y_0 \in C$ で $d(x, C) = \|x - y_0\|$ となるものが存在する．
（ヒント：$d := d(x, C) = \lim_{n\to\infty} \|y_n - x\|$ となる $y_n \in C$ が取れる．平行四辺形公式をうまく用いると，$\alpha_n := \sup_{m \geq n} \left(\|x - y_m\|^2 - d^2\right) \to 0$ となることから y_n が Cauchy 列であることがわかる．）

(2) 点 x から C への最短距離を与える $y_0 \in C$ は一意に定まる．

問 B-2

$f \in L^2([0,1])$ のとき以下を示せ．

(1)

$$\|f\|_{L^2} = \sup_{\|g\|_{L^2} \leq 1} \left| \int_{[0,1]} f(x)g(x)\mathrm{d}x \right|.$$

(2) L^2 の意味で $g_k \to g$，すなわち $\|g_k - g\|_{L^2} \to 0 (k \to \infty)$ のとき

$$\int_{[0,1]} f(x)g(x)\mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} \int_{[0,1]} f(x)g_k(x)\mathrm{d}x.$$

問 B-3

写像 $\phi : L^2([0,1]) \to \mathbb{R}$ が以下をみたすとき，ϕ は連続であることを示せ．

線形性　任意の $\lambda \in \mathbb{R}$ と $f, g \in L^2([0,1])$ に対し，$\phi(\lambda f + g) = \lambda\phi(f) + \phi(g)$.
有界性　ある $M > 0$ が存在し，任意の $f \in L^2([0,1])$ に対して $|\phi(f)| \leq M\|f\|_{L^2}$.

逆に，線形な $\phi : L^2([0,1]) \to \mathbb{R}$ が連続であれば有界性をもつことを示せ．
（ヒント：対偶を示す．有界性がないので任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し，$|\phi(u_n)| > n^2\|u_n\|_{L^2}$ となる $u_n \in L^2([0,1])$ が存在することを用いる．）