実解析第 2 同演習・演習第 11 回

2023 年 1 月 13 日

問 A-1

可測空間 $(X, \mathcal{B})$ 上の測度 μ と可測写像 $T : (X, \mathcal{B}) \to (X, \mathcal{B})$ について，μ が T-不変であるとは，任意の $A \in \mathcal{B}$ に対し

$$\mu\left(T^{-1}A\right) = \mu(A)$$

となることである．T-不変な測度 μ について以下を示せ.

(1) 可測関数 $f : X \to \mathbb{R}$ に対し，

$$Uf(x) := f(T(x))$$

で定義される関数 $Uf : X \to \mathbb{R}$ は可測.

(2) 単関数 f について，

$$\int_X f \mathrm{d}\mu = \int_X Uf \mathrm{d}\mu. \tag{1}$$

(3) 非負値関数 $f \in L^1(X, \mu)$ についても等式 (1) が成り立つ.

(4) $1 \leq p < \infty$ に対し，$U : L^p(X, \mu) \to L^p(X, \mu)$ とみることができる．またこのとき U は L^p ノルムを保つ，すなわち任意の $f \in L^p(X, \mu)$ に対し

$$\|f\|_{L^p} = \|Uf\|_{L^p}.$$

問 A-2

コンパクト距離空間 X を考える.

(1) X 上の連続写像全体からなる集合 $C(X)$ について，

$$\|f\|_\infty := \max_{x \in X} |f(x)|$$

と定めると，$\|\cdot\|_\infty$ により $C(X)$ はノルム空間になることを示せ.

(2) 関数列 $f_n \in C(X)$ が $f \in C(X)$ に収束するとき，すなわち

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$$

であるとき，$\sup_n |f_n|$ は有界関数であることを示せ.

(3) X 上の任意の Borel 確率測度 μ に対し，連続写像 $\hat{\mu} : C(X) \to \mathbb{R}$ が

$$\hat{\mu}(f) := \int_X f \mathrm{d}\mu$$

により定義されることを示せ.

問 B-1

可測空間 $(X, \mathcal{B})$ と可測写像 $T : (X, \mathcal{B}) \to (X, \mathcal{B})$ について，X 上の有限測度 μ が T-不変であるとする．このとき，任意の可測集合 $A \in \mathcal{B}$ について以下が成り立つことを示せ:

ほとんど全ての $x \in A$ に対し自然数 $n \in \mathbb{N}$ が存在し，$T^n(x) \in A$ となる.

ただし，$T^n(x)$ は T の n 回合成を表す．例えば $T^3(x) = T(T(T(x)))$ である．なお，この結果は Poincaré の再帰定理と呼ばれる.

（ヒント：「A から出発するが A に戻ってこない点全体の集合」に行き着く集合を考える.）

問 B-2

可測空間 $(X, \mathcal{B})$ と可測写像 $T : (X, \mathcal{B}) \to (X, \mathcal{B})$ について，X 上の確率測度 μ が T-不変であるとする．μ に関して T がエルゴード的であるとは，$T^{-1}B = B$ となる任意の可測集合について $\mu(B) = 0$ または $\mu(B) = 1$ となることである．μ に関して T がエルゴード的であるとする．このとき，$\mu(A) > 0$ となる $A \in \mathcal{B}$ に対し以下を示せ.

(1) 関数

$$n_A(x) := \inf\{n \geq 1 \mid T^n(x) \in A\}$$

はほとんど全ての $x \in A$ に対し定義され，$A_n := \{x \in A \mid n_A(x) = n\} \in \mathcal{B}$ である．また，ほとんど全ての $x \in X$ に対し $k \in \mathbb{N}$ が存在して $T^k(x) \in A$ となる.

(2) T が可逆，すなわち T は全単射で $T^{-1} : X \to X$ も可測であるとき，

$$A_{n,k} := T^k(A_n)$$

（$k = 0, 1, \cdots, n-1$）は互いに素な可測集合の族であり，ほとんど全ての $x \in X$ に対し $k, n \in \mathbb{N}$ が存在して $x \in A_{n,k}$ となる.（ヒント：T^{-1} にも (1) の結果は適用できる.）

(3) T が可逆であるとき，

$$\int_A n_A(x) \mathrm{d}\mu = 1.$$

（この結果は Kac の補題と呼ばれる.）