実解析第2同演習・演習第10回

2023年1月6日

問 A-1

$1 < p < \infty$ について，Banach 空間 $(L^p(X), \|\cdot\|_p)$ を考える．

(1) 関数 $A : L^p(X) \to \mathbb{R}$ が $f_0 \in L^p(X)$ で連続であることの定義を述べよ．

(2) 連続関数 $Z : L^p(X) \to \mathbb{R}$ について，稠密な部分集合 $D \subset L^p(X)$ が存在して任意の $f \in D$ に対し $Z(f) = 0$ が成り立つとする．このとき任意の $f \in L^p(X)$ に対して $Z(f) = 0$ が成り立つことを示せ．

問 A-2

$1 < p < \infty$ とする．$\mu(X) = 1$ となるとき，任意の非負値関数 $h \in L^p(X, \mu)$ に対し，

$$\left(\int_X h \mathrm{d}\mu\right)^p \leq \int_X h^p \mathrm{d}\mu$$

を示せ．

問 B-1

(1) 関数 $\log : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ は上に凸であることを示せ．

(2) 正値関数 $f, g \in L^1(X, \mu)$ が

$$\int_X f \mathrm{d}\mu = \int_X g \mathrm{d}\mu = 1$$

を満たせば

$$\int_X f \log \frac{f}{g} \mathrm{d}\mu \geq 0$$

であることを示せ（これは Gibbs の不等式と呼ばれる）．

(3) $\|f\|_{L^1} = 1$ となる正値関数 $f \in L^1(\mathbb{R})$ に対し，

$$\int_{\mathbb{R}} x^2 f(x)\mathrm{d}x < \infty$$

であれば

$$H(f) := -\int_{\mathbb{R}} f \log f \mathrm{d}x < \infty$$

であることを示せ.

(4) 定数 $a \in \mathbb{R}, b > 0$ に対し，

$$\int_{\mathbb{R}} x f(x)\mathrm{d}x = a$$
$$\int_{\mathbb{R}} (x-a)^2 f(x)\mathrm{d}x = b$$

をみたし，$\|f\|_{L^1} = 1$ となる正値関数 $f \in L^1(\mathbb{R})$ のうち，$H(f)$ を最大にするものを求めよ.

問 B-2

$1 \leq p < \infty$ について，Banach 空間 $(L^p(\mathbb{R}), \|\cdot\|_p)$ を考える．各 $f \in L^p(\mathbb{R})$ と $t \in \mathbb{R}$ に対し，平行移動を（$f(s+t)$ が定義されているときは）

$$(\tau_t f)(s) := f(s+t)$$

で定義する.

(1) 任意の $t \in \mathbb{R}$ に対し，$\tau_t f \in L^p(\mathbb{R})$ を示せ．なお，$\tau_t f$ の可測性は認めてよい.（これにより，任意の $t \in \mathbb{R}$ に対し写像 $\tau_t : L^p(\mathbb{R}) \to L^p(\mathbb{R})$ が定義できることがわかる.）

(2) 任意の可測集合 $E \subset \mathbb{R}$ に対し $\tau_t \chi_E = \chi_{E-t}$ を示せ．ただし $E - t := \{x - t \mid x \in E\}$ と定義する.

(3) f が simple function であるとき,（$L^p(\mathbb{R})$ の位相で）$t \to 0$ のとき $\tau_t f \to f$ であることを示せ.

(4) 任意の $f \in L^p(\mathbb{R})$ に対し $t \to 0$ のとき $\tau_t f \to f$ であることを示せ.（ヒント：simple function が L^p で稠密であることを用いる．また τ_t は L^p ノルムを保ち，線形であることに注意.）