実解析第2同演習・演習第1回

2022 年 10 月 14 日

問 A-1

集合 $X = \{0, 1\}$ と X の部分集合の族

$$\mathcal{O}_X = \{\emptyset, \{0\}, X\}$$

を考える.

(1) $(X, \mathcal{O}_X)$ は $\mathcal{O}_X$ を開集合系とする位相空間であることを示せ.
(2) $\mathcal{O}_X$ を含む最小の σ-algebra を求めよ.
(3) $Y = \{0, 1, 2\}$ と $\mathcal{O}_Y = \{\emptyset, \{0\}, Y\}$ について同様の考察を行え.

問 A-2

集合 X 上の σ-algebra からなる空でない族 $\mathcal{G} = \{G_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ について,

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} G_\lambda$$

も σ-algebra であることを示せ.

問 A-3

一般に, 可測空間 $(X, \mathcal{F})$ と $(Y, \mathcal{G})$ に対し, 写像 $f : X \to Y$ が可測であるとは, 任意の $A \in \mathcal{G}$ について $f^{-1}(A) \in \mathcal{F}$ となることをいう. 写像が可測であるかどうかは σ-algebra の取り方によるので, これを $f : (X, \mathcal{F}) \to (Y, \mathcal{G})$ とも表記する.

(1) 恒等写像 $\mathrm{id} : (X, \mathcal{F}) \to (X, \mathcal{F})$ は可測であることを示せ. 別の σ-algebra $\mathcal{G}$ をとり, $\mathrm{id} : (X, \mathcal{F}) \to (X, \mathcal{G})$ を考えると, これは可測になるか?
(2) 可測写像 $f : (X, \mathcal{F}) \to (Y, \mathcal{G})$ と $g : (Y, \mathcal{G}) \to (Z, \mathcal{H})$ について, その合成 $g \circ f : (X, \mathcal{F}) \to (Z, \mathcal{H})$ も可測であることを示せ.

問 A-4

$X = \{1, 2, 3, \cdots, n\}$ とする．非負の実数 p_i $(i = 1, 2, 3, \cdots, n)$ が $\sum_i p_i = 1$ を満たすとき，$\mu : \mathcal{P}(X) \to \mathbb{R}$ を

$$\mu(A) := \sum_{i \in A} p_i$$

と定義する．このとき，$(X, \mathcal{P}(X), \mu)$ は測度空間であることを示せ．

問 B-1

$(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ を位相空間とする．

(1) 写像 $f : X \to Y$ が連続であれば，可測空間 $(X, \mathcal{B}(X))$ から $(Y, \mathcal{B}(Y))$ への写像とみたとき，f は可測であることを示せ．

(2) 位相空間 $(X, \mathcal{O}_X)$ について，$\mathcal{F}$ を X 上の σ-algebra で $\mathcal{O}_X \subset \mathcal{F}$ となるものとする．このとき，以下は同値であることを示せ．

(a) $\mathcal{F} = \mathcal{B}(X)$.

(b) 任意の位相空間 $(Z, \mathcal{O}_Z)$ と連続関数 $f : Z \to X$ について，f は $(Z, \mathcal{B}(Z))$ から $(X, \mathcal{F})$ への写像とみて可測．

問 B-2

$(X, \mathcal{F}, \mu)$ を測度空間とする．集合の列 $A_i \in \mathcal{F}$（$i = 1, 2, \cdots$）が $\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) < \infty$ をみたすとき，

$$\mu\left(\bigcap_{i=1} \bigcup_{j \geq i} A_j\right) = 0$$

であることを示せ．（この結果は Borel–Cantelli の補題とよばれる．）

問 B-3

$f : X \to Y$ を写像，$(X, \mathcal{F}, \mu)$ を測度空間とする．

(1) 集合族 $f(\mathcal{F}) := \{E \subset Y \mid f^{-1}(E) \in \mathcal{F}\}$ は σ-algebra であり，$f : (X, \mathcal{F}) \to (Y, f(\mathcal{F}))$ は可測であることを示せ．

(2) $\nu : f(\mathcal{F}) \to [0, \infty)$ を $\nu(E) = \mu(f^{-1}(E))$ で定めると，ν は $f(\mathcal{F})$ 上の測度であることを示せ．なお，この測度は μ の押し出しといい，$f_*(\mu)$ と書かれる．

(3) さらに写像 $g : Y \to Z$ が与えられたとする．このとき，$(g \circ f)(\mathcal{F}) = g(f(\mathcal{F}))$ であり，$(g \circ f)_*(\mu) = g_*(f_*(\mu))$ であることを示せ．