不連続点を含む広義積分

2021 年 10 月 26 日

1　広義積分とは？

今まで考えてきた積分は

- 積分を行う領域は有界閉集合
- 積分される関数は有界関数

という状況でのものであった．しかし，次のように「性質の悪い」問題を応用上考えなければならない場合がある．

例 1. 二変数の確率分布が $p(x, y)$ で与えられるとき，一回の試行で D 上の点が得られる確率は

$$\iint_D p(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

で与えられる． したがって，x の値が正になる確率は $D = \{(x, y) \mid x > 0\}$ という場合にあたるが，この D は有界でも閉集合でもない．

例 2. 長さ L の細い棒の上に電荷が線密度 σ で分布しているとき，この棒が持つ自己エネルギーは $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x < y \leq L\}$ として

$$\iint_D \frac{\sigma^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|x-y|}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

と表される．このとき，被積分関数は有界ではない．

このような「悪い」積分にも，**広義積分**を用いると合理的に値を定めることができる．値が負にならない関数については次のように定義される．

定義 1.1. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ が領域 D 上で常に $f(x, y) \geq 0$ であるとき，

$$\iint_D f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sup\left\{\iint_K f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \mid K \text{ は } D \text{ に含まれる有界閉集合で面積が定まるもの}\right\}$$

と定義する．この値が有限であるとき，D 上で f の広義積分が存在するという．

すなわち，D 上の広義積分とは，積分領域を色々と取り替えながら今までの方法で計算したときの「最大値」である．また，「面積が定まるもの」という制限は積分が意味を持つために必要である．もし D が有界閉集合であれば，これは今までの積分と同じ値になる．

広義積分の定義から直接積分を行うことは難しいので，実際の計算には次の定理が用いられる．

定理 1.2. 領域 D 上で非負値関数 f の広義積分が存在するとする．D に含まれる有界閉集合で面積が定まるものの列 $\{K_n\}$ があり，

1. 任意の n について $K_n \subset K_{n+1} \subset D$（$K_n$ は単調増加）.
2. どのような有界閉集合 $A \subset D$ についてもある N が存在して $A \subset K_N$（K_n はどの有界閉集合よりも増大）.

となるなら，

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \lim_{n\to\infty}\iint_{K_n} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

が成り立つ．

Proof. 数列 a_n を

$$a_n = \iint_{K_n} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

と定める．仮定の (1) と $f(x,y) \geq 0$ より a_n は単調増加である．また，広義積分の定義により任意の n について

$$a_n = \iint_{K_n} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leq \iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y < \infty$$

だから a_n は上に有界な単調増加列なので収束する．$\alpha = \lim_{n\to\infty} a_n$ とおくと，

$$\alpha \leq \iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{1}$$

である．

一方，任意の $\epsilon > 0$ に対して上限の定義より

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \epsilon \leq \iint_A f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

となる有界閉集合 $A \subset D$ が存在する．仮定の (2) よりある N について $A \subset K_N$ だから，

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \epsilon \leq a_N$$

となる．再び a_n が単調増加であることを用いると

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \epsilon \leq \alpha$$

である．ϵ は任意だったので結局

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \leq \alpha \tag{2}$$

となる．

不等式 (1) と (2) を合わせると

$$\alpha = \iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

である． □

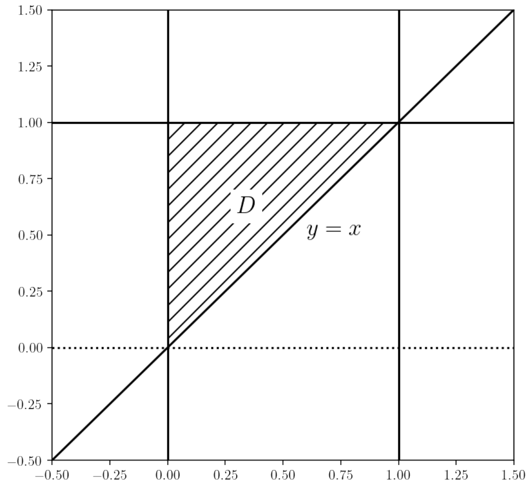
2　不連続点を含む広義積分の例

不連続点があって有界でなくなっている関数について，定理 1.2 を用いて広義積分を計算してみる．問題のある点にかからないよう K_n の増大列をうまく構成することがポイントである．

例 3. $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x < y \leq 1\}$ のとき，

$$\iint_D \frac{1}{\sqrt{|x-y|}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

を求めたい．まず積分を行う領域を図示すると次のようになる．



ここで問題があるのは $y = x$ の部分である．そこで

$$K_n = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1 \text{ かつ } x + \frac{1}{n} \leq y \leq 1\}$$

とすれば $K_n \subset D$ であり，これは定理の仮定を満たす．また $y = x$ とは交わらないので

$$\iint_{K_n} \frac{1}{\sqrt{|x-y|}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{4}{3} - \frac{2}{\sqrt{n}}$$

と計算することができる．よって

$$\iint_D \frac{1}{\sqrt{|x-y|}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{4}{3}$$

である．

一般に，$D = \{(x, y) \mid 0 \leq g(x, y) \leq a\}$ という形の領域で，関数 $f(x, y)$ が $g(x, y) = 0$ のところで非有界になっている場合は

$$K_n = \{(x, y) \mid \frac{1}{n} \leq g(x, y) \leq a\}$$

と選ぶと良い． 上の例はこのパターンではないが，$y = x$ の代わりに $y = x + \frac{1}{n}$ を考えるのは同様の発想である．