# 2 重積分の定義

2021 年 9 月 28 日

## 1　長方形上の積分の定義

2 変数関数の積分の基本は長方形上の積分である．あとで見るように，円盤上など一般の形の領域での積分はこれを元にして作られる．

1 変数の場合は積分を区間の分割により定義した．2 変数の場合，区間に対応するのは**長方形**

$$[a,b] \times [c,d] = \{(x,y) \mid a \leq x \leq b \text{ かつ } c \leq y \leq d\}$$

である．長方形の分割は，区間の分割から定義することができる．

**定義 1.1** (分割，細分)**.** 長方形 $[a,b] \times [c,d]$ の**分割**とは $[a,b]$ の分割 $\{x_0, \cdots, x_m\}$ と $[c,d]$ の分割 $\{y_0, \cdots, y_n\}$ の組のことである．これを

$$\Delta = \{x_0, \cdots, x_m, y_0, \cdots, y_n\}$$

と書く．

長方形の分割 $\Delta$ に対し，$x_i, x_{i-1}, y_j, y_{j-1}$ で指定される小長方形を $\delta_{ij}$ と名付けておく．

分割 $\Delta$ に対し，その**幅** $|\Delta|$ を

$$|\Delta| = \max_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} (x_i - x_{i-1}, y_j - y_{j-1})$$

で定義する．

また，分割 $\Delta'$ が分割 $\Delta$ の**細分**であるとは,

$$\Delta = \{x_0, \cdots, x_m, y_0, \cdots, y_n\}$$
$$\Delta' = \{x'_0, \cdots, x'_k, y'_0, \cdots, y'_l\}$$

であるとき，$\{x'_0, \cdots, x'_k\}$ が $\{x_0, \cdots, x_m\}$ の細分になっている，もしくは $\{y'_0, \cdots, y'_l\}$ が $\{y_0, \cdots, y_n\}$ の細分になっていることである．

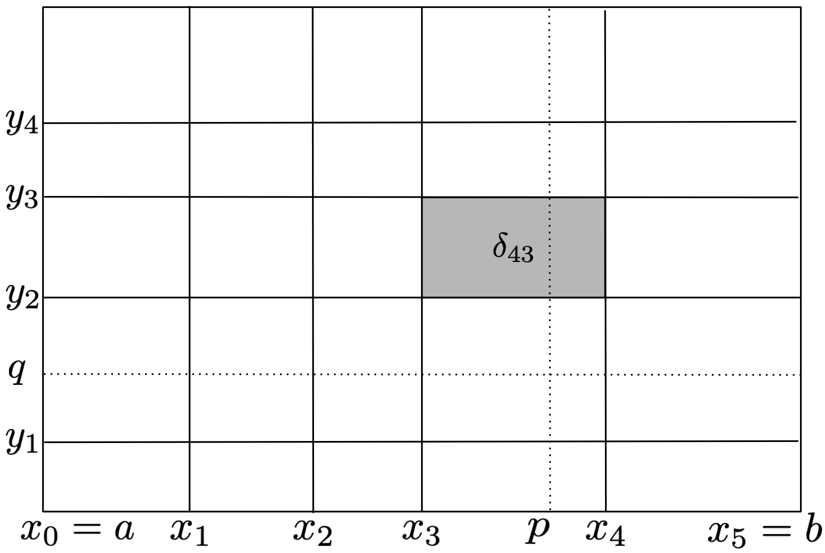


図 1　長方形 $R = [a, b] \times [c, d]$ の分割と小長方形 $\delta_{ij}$ の例．分点は一部省略されていることに注意．また，例えば $x_3$ と $x_4$ の間に分点 $p$ を，$y_1$ と $y_2$ の間に分点 $q$ を追加すると細分が得られる．

1 変数の場合と同様にリーマン和の概念が定義できる．

**定義 1.2** (リーマン和)**.** 長方形 $R = [a, b] \times [c, d]$ の分割 $\Delta = \{x_0, \cdots, x_m, y_0, \cdots, y_n\}$ と集合 $P = \{(p_{ij}, q_{ij}) \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$ で $(p_{ij}, q_{ij}) \in \delta_{ij}$ となるものについて，関数 $f$ の**リーマン和**を

$$S(f, \Delta, P) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} f(p_{ij}, q_{ij})(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$

で定義する．$P$ の要素 $(p_{ij}, q_{ij})$ は小長方形 $\delta_{ij}$ の**代表点**という．

これを用いて積分は次のように定義される．

**定義 1.3** (長方形上の積分)**.** 関数 $f$ と長方形 $R = [a, b] \times [c, d]$ について，$f$ のリーマン和が値 $I$ に**収束する**とは任意の $\varepsilon > 0$ に対してある $\delta > 0$ が存在し，$|\Delta| < \delta$ となる任意の分割 $\Delta$ と代表点の集合 $P$ について

$$|I - S(f, \Delta, P)| < \varepsilon$$

となることである．リーマン和が $I$ に収束するとき，この極限 $I$ を関数 $f$ の長方形 $R$ における**二重積分**といい，

$$\iint_R f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

と表す．二重積分が存在するとき，関数 $f$ は長方形 $R$ 上で **(リーマン) 積分可能**という．

これは「$x$ で積分した後に $y$ で積分したもの」という意味ではないことに注意する．定義はあくまでも長方形を $x, y$ の両方について細かくしたときの極限であり，変数ごとの操作は許されていない．

## 2　積分ができる関数，できない関数

どのような関数でも積分できるわけではない．例えば，いくらでも大きな値をとる関数は積分できない．

**定義 2.1.** 関数 $f(x,y)$ が集合 $A \subset \mathbb{R}^2$ 上で**有界**であるとは，ある $M > 0$ が存在して任意の $(x,y) \in A$ について $|f(x,y)| \leq M$ となることである．

**定理 2.2.** 関数 $f(x,y)$ が $R$ 上で積分可能ならば，$f(x,y)$ は $R$ 上で有界である．

それでは有界ならいつでも積分できるだろうか．この疑問に答えるためには，もう少し道具を用意する必要がある．

**定義 2.3** (過剰和，不足和)**.** 長方形 $R = [a,b] \times [c,d]$ 上で有界な関数 $f(x,y)$ と分割 $\Delta = \{x_0, \cdots, x_m, y_0, \cdots, y_n\}$ を考える．有界性より，各小長方形 $\delta_{ij}$ での $f(x,y)$ の上限と下限は有限値に定まる．そこで

$$M_{ij} = \sup_{(x,y)\in\delta_{ij}} f(x,y)$$
$$m_{ij} = \inf_{(x,y)\in\delta_{ij}} f(x,y)$$

とおく．$f(x,y)$ の $\Delta$ についての**過剰和**を

$$S_\Delta = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} M_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$

で定義する．また，**不足和**を

$$s_\Delta = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} m_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$

で定義する．

リーマン和と違い，過剰和・不足和は代表点を選ばなくても定義できることに注意しよう．過剰和・不足和の性質を列挙しておく．

**補題 2.1.** 長方形 $R = [a,b] \times [c,d]$ 上で有界な関数 $f(x,y)$ と分割 $\Delta$ を考える．$S_\Delta, s_\Delta$ について次が成り立つ．

1. 任意のリーマン和 $S(f,\Delta,P)$ に対し，$s_\Delta \leq S(f,\Delta,P) \leq S_\Delta$.
2. $\Delta'$ が $\Delta$ の細分であれば $S_{\Delta'} \leq S_\Delta$，$s_{\Delta'} \geq s_\Delta$.

関数の積分可能性を判定するには，次の定理が非常に有用である．

**定理 2.4** (リーマン積分可能性の判定法)**.** 長方形 $R = [a,b] \times [c,d]$ 上で有界な関数 $f(x,y)$ が $R$ 上で積分可能であるための必要十分条件は，任意の $\varepsilon > 0$ に対してある分割 $\Delta$ が存在し，$S_\Delta - s_\Delta < \varepsilon$ となることである．

この定理を証明するために，「弱い意味での積分」にあたる概念を用意する．

**定義 2.5** (上積分，下積分)**.** 長方形 $R=[a,b]\times[c,d]$ 上で有界な関数 $f(x,y)$ について，その**上積分**を

$$\inf_{\Delta} S_{\Delta},$$

**下積分**を

$$\sup_{\Delta} s_{\Delta}$$

で定義する．ここでの $\sup,\inf$ は $R$ の分割全体についての上限・下限である．上積分は $\overline{\iint_R} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，下積分は $\underline{\iint_R} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ と書き表す．

この定義において，上積分は過剰和の下限，下積分は不足和の上限という組み合わせで定義されることに注意しよう．過剰和は細分をとると減少し，不足和は細分をとると増加するため，このような定義になっている．

さて，リーマン和が収束することが積分可能という条件の中身だった．上積分，下積分についても同様に次のことが言える．

**定理 2.6.** 長方形 $R=[a,b]\times[c,d]$ 上で有界な関数 $f(x,y)$ について以下が成り立つ．

*1.* 任意の $\varepsilon>0$ に対してある $\delta>0$ が存在し，$|\Delta|<\delta$ となる任意の分割について

$$0\le S_{\Delta}-\overline{\iint_R} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y<\varepsilon.$$

*2.* 任意の $\varepsilon>0$ に対してある $\delta>0$ が存在し，$|\Delta|<\delta$ となる任意の分割について

$$0\le \underline{\iint_R} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-s_{\Delta}<\varepsilon.$$

*Proof.* ここでは 1. のみを示す．まず，$f(x,y)$ は $R$ 上で有界なのである $M>0$ が存在して任意の $(x,y)\in R$ に対し

$$|f(x,y)|<M$$

が成り立つ．長方形 $R$ の辺の長さのうち大きい方を $L$ とおく．

$\varepsilon>0$ を任意に一つとり，これについて定理の主張にある条件を満たす $\delta$ を見つければよい．

上積分の定義より，ある分割 $\Delta_0$ について

$$S_{\Delta_0}<\frac{\varepsilon}{2}+\overline{\iint_R} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{1}$$

が成り立つ．$\Delta_0=\{a_0,a_1,\cdots,a_p,b_0,b_1,\cdots,b_q\}$ とおく．

求める $\delta$ は

$$\delta<\frac{\varepsilon}{4ML(p+q)}$$

ととれば良いことを示そう．

$|\Delta|<\delta$ となる分割について，その細分 $\Delta'=\Delta\cup\Delta_0$ を考える．これは $\Delta$ の分点に $\Delta_0$ の分点を追加したものである．$S_{\Delta'}$ が $S_{\Delta}$ よりもどの程度小さくなるのかを見積もろう．

$S_{\Delta}$ の小長方形 $\delta_{ij}$ は $\Delta_0$ の分点を追加することにより 2 つ以上の長方形に分割される可能性がある．例えば $\delta_{ij}=[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j]$ としたとき，ある $a_k$ について $x_{i-1}<a_k<x_i$ となったとしよう (図 2 を参照).

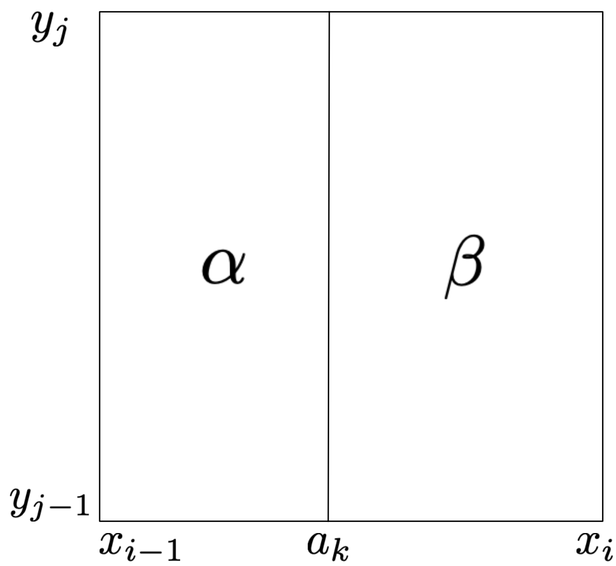


図 2　小長方形 $\delta_{ij}$ の分割.

このとき，分割前の過剰和への $\delta_{ij}$ の寄与は

$$M_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$

であり，分割後の寄与は $[x_{i-1}, a_k] \times [y_{j-1}, y_j]$ での上限を $\alpha$, $[a_k, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ での上限を $\beta$ として

$$\alpha(a_k - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) + \beta(a_k - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$

である．差し引き

$$\begin{aligned}&M_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) - (\alpha(a_k - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) + \beta(a_k - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}))\\&= (M_{ij} - \alpha)\,(a_k - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) + (M_{ij} - \beta)\,(a_k - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})\end{aligned}$$

だけ減少する．よって，

$$\begin{aligned}&M_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) - (\alpha(a_k - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) + \beta(a_k - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}))\\&< 2M(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})\end{aligned}$$

という評価が得られる．分点が追加されるのは高々 $p + q$ 回なので，このような減少が生じる部分の面積は高々 $L(p + q)\delta$ である．したがって上の式を足し合わせると

$$0 \leq S_\Delta - S_{\Delta'} < 2ML(p + q)\delta < 2ML(p + q)\frac{\varepsilon}{4ML(p + q)} = \frac{\epsilon}{2}$$

となる．

$\Delta'$ は $\Delta_0$ の細分でもあるから，$S_{\Delta'} \leq S_{\Delta_0}$ となるので $S_\Delta - S_{\Delta_0} \leq S_\Delta - S_{\Delta'}$ が得られる．これと式 (1) を合わせると

$$0 \leq S_\Delta - \overline{\iint_R} f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y < \varepsilon.$$

が得られる． □

極限の存在が上極限と下極限が一致することから示せるのと同様に，積分可能性は上積分と下積分が一致することから示せる．

**定理 2.7.** 長方形 $R=[a,b]\times[c,d]$ 上で有界な関数 $f(x,y)$ が $R$ 上で積分可能であるための必要十分条件は，上積分と下積分が一致することである．

*Proof.*（必要性）$f(x,y)$ が $R$ 上で積分可能であるとする．このとき任意の $\varepsilon>0$ に対して $\delta>0$ が存在し，$|\Delta|<\delta$ という任意の分割とリーマン和 $S(f,\Delta,P)$ に対し

$$-\varepsilon < S(f,\Delta,P) - \iint_R f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y < \frac{\varepsilon}{6}$$

が成り立つ．また定理 2.6 により，（必要ならば $\delta$ を小さく取り直せば）

$$0 \le S_\Delta - \overline{\iint_R} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y < \frac{\varepsilon}{3} \tag{2}$$

$$0 \le \underline{\iint_R} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y - s_\Delta < \frac{\varepsilon}{3} \tag{3}$$

も成り立つとして良い．

$S(f,\Delta,P)$ において各小長方形 $\delta_{ij}$ について $f$ の上限をとれば

$$S_\Delta - \iint_R f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \le \frac{\varepsilon}{6}$$

を得る．一方，下限を考えると

$$\iint_R f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y - s_\Delta \le \frac{\varepsilon}{6}$$

が得られる．よって，これらを足し合わせれば

$$0 \le S_\Delta - s_\Delta \le \frac{\varepsilon}{3} \tag{4}$$

である．

式 (2), (3) と (4) を足し合わせて

$$0 \le \underline{\iint_R} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \overline{\iint_R} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y < \varepsilon$$

を得る．今，$\varepsilon$ は任意であったので

$$\underline{\iint_R} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \overline{\iint_R} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$$

である．

（十分性）$f(x,y)$ の $R$ における上積分と下積分が一致するとし，その値を $I$ とおく．任意の $\varepsilon>0$ に対し，$\delta>0$ を適切に選べば $|\Delta|<\delta$ となる任意の分割について定理 2.6 の不等式が両方成り立つようにできる．

$|\Delta|<\delta$ となる任意の分割について，補題 2.1 の (1) も用いるとリーマン和 $S(f,\Delta,P)$ は

$$S(f,\Delta,P) - I \le S_\Delta - I < \varepsilon$$
$$I - S(f,\Delta,P) \le I - s_\Delta < \varepsilon$$

という不等式を満たす．これは $|I-S(f,\Delta,P)|<\varepsilon$ に他ならない． □

定理 2.4 は以上の結果を用いると容易に示せる．

定理 2.4 を用いるとどのような関数なら積分できるのかがわかる．この結果を述べるために「集合が無視できるほど小さい」ということを表す概念を用意しよう．

以下では長方形 $R$ の面積を $\mu(R)$ で表す．すなわち，$\mu([a,b]\times[c,d])=(b-a)(d-c)$ である．

**定義 2.8** (零集合)**.** 部分集合 $A\subset\mathbb{R}^2$ が**零集合**であるとは，任意の $\varepsilon>0$ に対して，長方形 $R_1,R_2,\cdots,R_m$ が存在して

$$A\subset\bigcup_{i=1}^{m}R_i$$

$$\sum_{i=1}^{m}\mu(R_i)<\varepsilon$$

となることである．

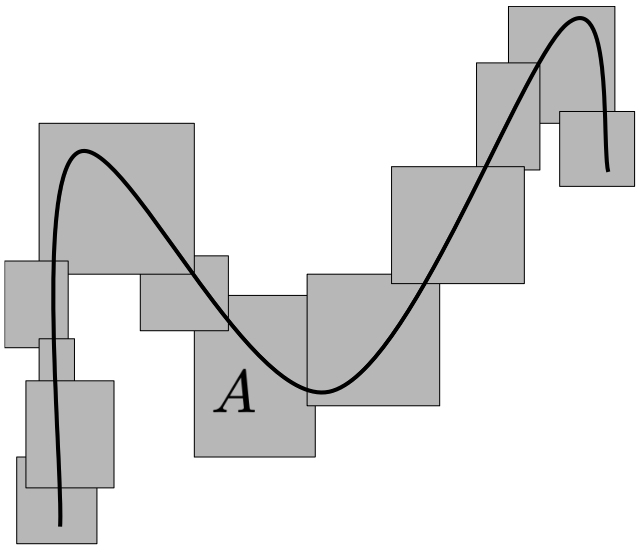


図 3　部分集合 $A\subset\mathbb{R}^2$ の長方形 $R_1,R_2,\cdots,R_m$ による被覆．この長方形の面積の総和を任意に小さくできるなら $A$ は零集合である．

**例 1.** 有限集合は零集合である．また，連続関数のグラフを有限個つなぎ合わせてできる集合も零集合である．

有界関数は，不連続点のなす集合が無視できるほど小さいならば積分可能である．

**定理 2.9.** 長方形 $R=[a,b]\times[c,d]$ 上で有界な関数 $f(x,y)$ について，$R$ における不連続点の集合が零集合ならば $R$ 上で積分可能である．

*Proof.* 任意の $\varepsilon>0$ に対し，分割 $\Delta'$ で $S_{\Delta'}-s_{\Delta'}<\varepsilon$ となるものを 1 つ見つければ良い．

$f(x,y)$ は $R$ で有界なので，$M>0$ が存在して任意の $(x,y)\in R$ について $|f(x,y)|<M$ が成り立つ．$f(x,y)$ の $R$ における不連続点の集合を $D$ とする．$D$ は零集合なので，長方形

$R_1, R_2, \cdots, R_m$ が存在して

$$D \subset \bigcup_{i=1}^{m} R_i$$

$$\sum_{i=1}^{m} \mu(R_i) < \frac{\varepsilon}{4M}$$

とできる．必要ならば $R_1, R_2, \cdots, R_m$ を少し大き目に取り直して，$D$ の点で長方形の辺にしか含まれないようなものはないとして良い．$R_i = [a_i, b_i] \times [c_i, d_i]$ とおき，$R_i' = (a_i, b_i) \times (c_i, d_i)$ とする．$R_i'$ は $R_i$ から辺を除いた部分である．すると，$f(x, y)$ は

$$D \backslash \bigcup_{i=1}^{m} R_i'$$

において連続であり，これは有界閉集合であるからその上で $f$ は一様連続である．したがって，$\delta > 0$ が存在して $\|(x', y') - (x, y)\| < \delta$ ならば

$$|f(x', y') - f(x, y)| < \frac{\varepsilon}{2\mu(R)}$$

が成り立つ．

$|\Delta| < \frac{\delta}{2}$ という分割 $\Delta$ を考える．$\Delta$ に分点として $\{a_1, b_1, \cdots, a_m, b_m, c_1, d_1, \cdots, c_m, d_m\}$ を付加したものを $\Delta'$ とする．$\Delta'$ の小長方形を $\delta_{ij}'$ で表そう．このとき，過剰和と不足和の差は

$$S_{\Delta'} - s_{\Delta'} = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l} (M_{ij}' - m_{ij}') \mu(\delta_{ij}')$$

と表すことができる．今，右辺の和を小長方形 $\delta_{ij}'$ が $A = \bigcup_{i=1}^{m} R_i$ に含まれるどうかで 2 つに分けて考える．すると含まれる部分については

$$\sum_{\delta_{ij}' \subset A} (M_{ij}' - m_{ij}') \mu(\delta_{ij}') < 2M \sum_{\delta_{ij}' \subset A} \mu(\delta_{ij}') < 2M \frac{\varepsilon}{4M} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

含まれない部分については一様連続性を用いて

$$\sum_{\delta_{ij}' \text{は } A \text{ に含まれない}} (M_{ij}' - m_{ij}') \mu(\delta_{ij}') < \frac{\varepsilon}{2\mu(R)} \sum_{\delta_{ij}' \text{は } A \text{ に含まれない}} \mu(\delta_{ij}') < \frac{\varepsilon}{2\mu(R)} \mu(R) = \frac{\varepsilon}{2}$$

と評価できる．これらを足し合わせて

$$S_{\Delta'} - s_{\Delta'} < \varepsilon$$

を得る． □

この特別な場合として次が重要である．

**定理 2.10.** 長方形 $R = [a, b] \times [c, d]$ 上で連続な関数 $f(x, y)$ は $R$ 上で積分可能である．

# 3　一般の有界集合上の二重積分

一般の場合も次のようにすれば定義できる．

**定義 3.1** (一般の有界集合上の二重積分)**.** 有界部分集合 $A \subset \mathbb{R}^2$ は長方形 $R$ を十分に大きくとれば $A \subset R$ となる．そこで $f$ の $R$ 上への**拡張** $\tilde{f}(x, y)$ を

$$\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & (\,(x,y) \in A \text{ のとき}) \\ 0 & (\,(x,y) \in R \backslash A \text{ のとき}) \end{cases}$$

と定義する．これを用いて，$A$ 上の関数 $f : A \to \mathbb{R}$ について，その $A$ 上での積分を

$$\iint_A f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_R \tilde{f}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

で定義する．

しかし，このときは積分可能性について注意を要する．例え $f$ が連続であったとしても，その拡張も連続とは限らないからである．

積分可能性に関する判定法を述べるために，次の概念を用意する．

**定義 3.2.** 部分集合 $A \subset \mathbb{R}^2$ について，$\mathbf{x}$ が $A$ の**境界点**であるとは任意の $\varepsilon > 0$ に対し，$\mathbf{x}$ 中心で半径 $\varepsilon$ の円は $A$ に含まれる点と $A$ に含まれない点の両方を含むことである．$A$ の境界点全体の集合を $A$ の**境界**といい，$\partial A$ と表す．

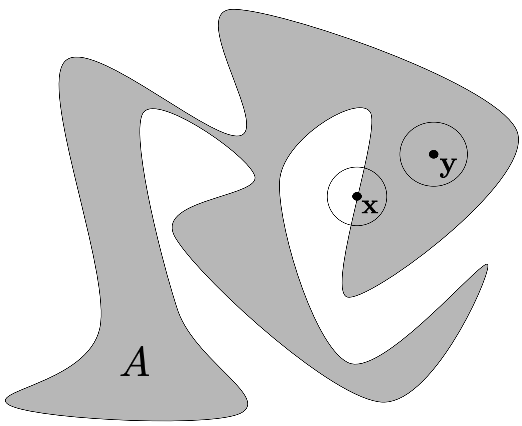


図 4　部分集合 $A \subset \mathbb{R}^2$ の境界点の例．図中の $\mathbf{x}$ は $A$ の境界点であるが，$\mathbf{y}$ は境界点ではない．

定理 2.9 を用いると次が示せる．

**定理 3.3.** 有界閉集合 $D \subset \mathbb{R}^2$ 上で連続な関数 $f(x, y)$ について，$\partial D$ が零集合であれば $D$ 上での積分が存在する．

特に，連続関数のグラフを有限個つなぎ合わせてできる集合は零集合なので，円など「普通の」有界閉集合にはこの定理が使える．