絶対収束と条件収束

2021 年 12 月 7 日

1　足す順番を変えるとどうなるか？

有限個の数を足す場合，足し算を行う順番を変えても結果は変わらない．例えば

$$1+2+3+4=((1+2)+3)+4=(1+2)+(3+4)=(1+(2+3))+4=10$$

である．しかし，無限個足す場合は奇妙な現象が生じる．例えば

$$S=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$$

を考えてみる．

足し方 1.

$$S=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots$$

と考えて足すと

$$S=\frac{1}{2}+\frac{1}{12}+\frac{1}{30}+\cdots$$

である．足される項は $\frac{1}{(2n+1)(2n+2)}$ という形なのでこれは正の数に収束する．

足し方 2.

足し算の順番を変えてみる．奇数分の一の項は加算，偶数分の一の項は減算であることに注意して，

$$S=\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{8}-\cdots\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2\cdot 3}-\frac{1}{4\cdot 3}+\cdots\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{2\cdot 5}-\frac{1}{4\cdot 5}+\cdots\right)\cdots$$

と考えて足すと

$$S=(1-1)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{5}\right)+\cdots$$

である．足される項はすべて 0 なのでこれは 0 に収束する．

このように，級数では足し方に依存して極限の値が変わってしまうことがありうる．しかし，これでは極限の値を求めるときに問題が生じてしまう．例えば等比級数の和を計算するとき，足し算の順番を変えて

$$S=1+r+r^2+\cdots=1+r(1+r+r^2+\cdots)=1+rS$$

と計算し，$S=\frac{1}{1-r}$ を導くことは可能だろうか？

2　絶対収束と条件収束

極限の値が足す順番によらずに定まるための条件として重要なのが**絶対収束**という概念である．

定義 2.1. 級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

が**絶対収束**するとは各項の絶対値をとった級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

が収束することである．

収束するが絶対収束でない級数は**条件収束**するという．

例 1.
- 正項級数については，絶対収束と収束は同値である．
- 条件収束する級数の例としては

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

がある．これはライプニッツの定理により収束するが，各項の絶対値をとったものは調和級数なので収束しない．

絶対収束は収束性よりも強い概念である．

定理 2.2. 級数が絶対収束するならば収束する．

Proof. コーシーの収束条件，すなわち数列 x_n が収束することと，「任意の $\epsilon > 0$ に対し，N が存在して $m \geq n \geq N$ のとき $|a_m - a_n| < \epsilon$」が同値であることを用いる．

部分和 S_n がコーシーの収束条件を満たすことを示そう．任意の $m \geq n$ について

$$|S_m - S_{n-1}| = \left| \sum_{k=n}^{m} a_k \right| \leq \sum_{k=n}^{m} |a_k|$$

となるので，$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ の収束性から元の級数についての収束性がわかる． □

そして，**絶対収束する場合には足し算の順序を変更しても構わない**ことがわかる．

定理 2.3. 級数が絶対収束するならば，その極限は足し算の順序によらない．すなわち，絶対収束する級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の項の順序を並べ替えたものを $\sum_{n=1}^{\infty} a'_n$ としたとき，後者も絶対収束して

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a'_n$$

が成り立つ．

Proof. まず，$\sum_{k=1}^{\infty} a'_k$ が絶対収束することを示そう．n 項目までの部分和について考えると，どの a'_k もある a_l に一致するから

$$\sum_{k=1}^{n} |a'_k| \le \sum_{l=1}^{\infty} |a_l|$$

である．よって，$\sum_{k=1}^{\infty} a'_k$ は絶対収束する．

次に，極限が変わらないことを示す．まず，もともと正項級数であった場合を考えよう．

n 項目までの部分和を

$$\sum_{k=1}^{n} a'_k$$

とする．十分に大きい m を考えると

$$\sum_{l=1}^{m} a_l$$

に上の部分和の a'_k がすべて現れるようにできる．したがって

$$\sum_{k=1}^{n} a'_k \le \sum_{l=1}^{m} a_l$$

である．よって極限は

$$\sum_{k=1}^{\infty} a'_k \le \sum_{l=1}^{\infty} a_l$$

となる．上の議論で元の級数と並べ替えた級数の役割を入れ替えれば

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \le \sum_{l=1}^{\infty} a'_l$$

もわかる．よって級数の和の値は一致する．

一般の場合には次のように考える．まず，足す順序を変更して正負の項に分け，

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{m=1}^{\infty} p_m - \sum_{m=1}^{\infty} q_m$$

という形にする（$p_m, q_m \ge 0$）．絶対収束なので右辺の和はどちらも収束し，引き算には意味がある．同様に

$$\sum_{n=1}^{\infty} a'_n = \sum_{m=1}^{\infty} p'_m - \sum_{m=1}^{\infty} q'_m$$

と並べ替えると，正項級数では並べ替えられることがわかっているので

$$\sum_{m=1}^{\infty} p_m = \sum_{m=1}^{\infty} p'_m, \sum_{m=1}^{\infty} q_m = \sum_{m=1}^{\infty} q'_m$$

である．したがって級数の和の値は一致する．□

絶対収束のときは和の順番を変更できることがわかった．それでは，条件収束であっても並べ替えられる事はあるだろうか．この疑問については次の定理が解答を与える．

定理 2.4 (リーマンの級数定理)**.** 条件収束する級数は，項の順序を並べ替えることにより任意の値に収束させることができる．さらに，発散するように並び替えることもできる．

したがって，条件収束は最悪の場合であり，和の順番を変更することはできない．