# 一般の座標変換による 2 重積分

2021 年 10 月 12 日

## 1　座標変換とは？

通常，平面上の点の位置を指定するには $x$ 座標と $y$ 座標を用いる（**直交座標系**という）．しかし，点の位置を指定する方法はこれ以外にもある．

**例 1.** 一般に，一次独立なベクトル $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ が与えられたとき，平面上の任意の点は二つの実数 $s, t$ を用いて

$$s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$$

という形式で表せる．実際，$(x, y) \in \mathbb{R}^2$ に対して

$$(x, y) = s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$$

という方程式は $s, t$ について解くことができるので，平面上の任意の点はこの形で表せる．また，その解は一意的なので表し方も一通りである．

**例 2.** さらに別の方法として

$$(x, y) = (s, e^s + t) \tag{1}$$

という形に表すこともできる．

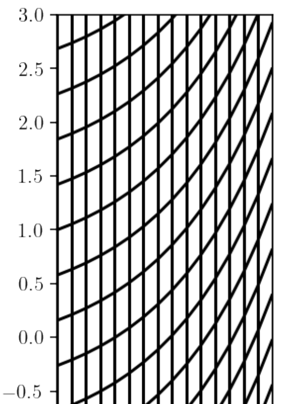


図 1　$(x, y) = (s, e^s + t)$ という座標系の図．実線は $s$ 座標，$t$ 座標が一定となる曲線による格子．例えば $(x, y) = (0, 1)$ は $(s, t) = (0, 0)$ に対応している．

一般に平面上の点と実数２つの組との対応で，

- 任意の実数の組は平面上のある点に対応する
- 対応している実数が異なるなら違う点を表している

ような方法は何通りもある．このように，平面上の点の位置を二つの実数を用いて表す方法のことを**座標系**という．以下，点 $P$ に対応する実数の組は $(s(P), t(P))$ などと書くことにしよう．

座標系が異なれば点の表現は異なることに注意する．例えば例 2 の座標系で $(0, 1)$ と表される点は直交座標系では $(0, 2)$ と表される．

関数はある座標系での点の表し方を用いて定義されるので，座標系を取り替えるとその表示も変わる．例えば直交座標系を用いて

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

と定義される関数 $f$ は例 2 の座標系を用いると，$s$ と $t$ の関数として

$$f(s, t) = s^2 + (e^s + t)^2$$

と表現される．

点を表現する実数の組が座標系の取り換えによりどのように変化するかを考えよう．平面上の座標系 $(s, t)$ と $(s', t')$ が与えられたものとしよう．このとき任意の実数の組 $(\alpha, \beta)$ に対して，

$$(s(P), t(P)) = (\alpha, \beta)$$

となる点 $P$ がただ一通りに定まる．またこの $P$ は座標系 $(s', t')$ では

$$(s'(P), t'(P))$$

という実数の組に対応する．したがって $s'$ と $t'$ は $\alpha$ と $\beta$ の関数とみなせる．$\alpha$ は $s$ の値，$\beta$ は $t$ の値であるからこれを省略して

$$s' = \phi(s, t)$$
$$t' = \psi(s, t)$$

という形に書く．この右辺の関数の組 $(\phi(s, t), \psi(s, t))$ を座標系 $(s', t')$ から $(s, t)$ への**座標変換**（**変数変換**）という．座標変換は 2 変数の写像

$$\Phi : (s, t) \mapsto (\phi(s, t), \psi(s, t))$$

とみることができる*1．座標変換を用いると，座標系 $(s', t')$ での関数 $f(s', t')$ は座標系 $(s, t)$ では $f(\phi(s, t), \psi(s, t))$ という関数になることがわかる．

# 2　積分の座標変換

積分は直交座標系を用いて定義されるので，別の座標系に移るとその表示も変化する．その変換の規則は次のようになる．

---

*1 写像の矢印の向きと座標変換の向きが逆になっていることに注意する．座標変換の向きは $(s', t')$ での表示を $(s, t)$ での表示に変換すると考えて決めている．そのため，写像の矢印の向きと逆になる．

**定理 2.1.** 直交座標系から座標系 $(s,t)$ への変換を

$$x = \phi(s,t)$$
$$y = \psi(s,t)$$

とする．また，$\Phi(s,t) = (\phi(s,t), \psi(s,t))$ とする．もし $\phi(s,t), \psi(s,t)$ が連続微分可能であり，そのヤコビ行列式

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)} = \frac{\partial\phi(s,t)}{\partial s}\frac{\partial\psi(s,t)}{\partial t} - \frac{\partial\psi(s,t)}{\partial s}\frac{\partial\phi(s,t)}{\partial t}$$

が 0 にならないならば，$D \subset \mathbb{R}^2$ 上で積分可能な関数 $f(x,y)$ について

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\Phi^{-1}(D)} f(\phi(s,t), \psi(s,t)) \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,t)}\right| \mathrm{d}s\mathrm{d}t$$

が成り立つ．ただし，

$$\Phi^{-1}(D) = \{(s,t) \mid (\phi(s,t), \psi(s,t)) \in D\}$$

である．

（この定理の証明はやや複雑なので省略する．興味のある人は占部実・佐々木右左編『微分・積分教科書』の定理 7.6 や笠原晧司著『微分積分学』の定理 7.22 などを参照.）

1 変数の積分の場合，$x = g(u)$ と変数変換を行うとき

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(u))g'(u)\mathrm{d}u$$

となったことを思い出すと，以上の座標変換の公式はこの一般化になっていることがわかる．

**例 3.** 座標変換を

$$x = as + bt$$
$$y = cs + dt$$

で定めるとき，行列

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

を用いると，ヤコビ行列式は $\det A = ad - bc$ と表される．$A$ が正則であればこの変数変換により

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = |ad-bc| \iint_{A^{-1}(D)} f(as+bt, cs+dt)\mathrm{d}s\mathrm{d}t$$

と変換される．

座標変換をうまく用いると積分の計算が簡単になることがある．

**例 4.** $D = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1$ かつ $0 \le x+y \le 1\}$ のとき

$$\iint_D x(x+y)^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

という積分を求めることを考える．

$$s = x$$
$$t = x + y$$

という変数変換を考えると

$$
\begin{aligned}
x &= s \\
y &= t - s
\end{aligned}
$$

となるから

$$
A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}
$$

と置けば

$$
\iint_D x(x+y)^3 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{A^{-1}(D)} st^3 \mathrm{d}s\mathrm{d}t
$$

と書き換えることができる．また，

$$
A^{-1}(D) = \{(s,t) \mid 0 \leq s \leq 1 \text{ かつ } 0 \leq t \leq 1\}
$$

なので

$$
\iint_D x(x+y)^3 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{[0,1]\times[0,1]} st^3 \mathrm{d}s\mathrm{d}t
$$

となる．右辺の積分は簡単に実行できる．