補足資料：微積分の基礎事項について

2021 年 9 月 16 日

1　集合の基本

「集合」という概念を正確に述べることは非常に難しい[*1]．しかし，微積分の話を理解するためには高校で習う程度の理解で十分通用する．何よりも記法を理解しておくことが重要である．

定義 1.1. 要素また元の集まりを**集合**という．要素 a が集合 A に属しているとき，$a \in A$ とかく．要素 a が集合 A に属していないとき，$a \notin A$ とかく．要素を一つも持たない集合を**空集合**といい，$\emptyset$ とかく．

例 1. 自然数全体の集合を $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \cdots\}$ と書く[*2]．例えば $0 \in \mathbb{N}$ であるが，$-1 \notin \mathbb{N}$ である．集合の要素が集合になるようなものを考えることもありうる．例えば，$\{\emptyset\}$ は空集合を要素とする集合である．

上で述べたように集合を要素にもつ集合を考えることはありうるが，これは無条件に考えて良いものではない．

練習問題 1.2 (ラッセルのパラドックス)**.** 「集合」として $R = \{A \mid A \notin A\}$ というものを考えると，矛盾が生じることを示せ．

集合には**演算**や**包含関係**が定義される．これらは論理のことば「かつ」，「または」，「ならば」，「全ての〜」，「ある〜」と対応する．

定義 1.3. 二つの集合 A と B に対し，その**積集合** $A \cap B$ とは A と B の両方に属している要素全体の集合である．すなわち，

$$A \cap B = \{a \mid a \in A \text{ かつ } a \in B\}.$$

また**和集合** $A \cup B$ とは A と B のどちらかに属している要素全体の集合である．すなわち，

$$A \cup B = \{a \mid a \in A \text{ または } a \in B\}.$$

[*1] 興味のある人は「公理的集合論」について調べてみると良い．
[*2] N は natural number の n.

一般に，$A_1, A_2, \cdots$ が集合であるとき，これらの**積集合** $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i$ を

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \{a \mid \text{任意の } i \text{ について } a \in A_i\},$$

和集合 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ を

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \{a \mid \text{ある } i \text{ について } a \in A_i\}$$

と定義する．

定義 1.4. 二つの集合 A と B に対し，集合 A が B に**含まれる**とは A に属している要素が全て B に属することである．このとき $A \subset B$ と書く．また，二つの集合 A と B が**等しい**とは，$A \subset B$ かつ $B \subset A$ となることである．

したがって，「$A \subset B$」とは「$x \in A$ ならば $x \in B$」という命題が成り立つことに他ならない．「$A = B$」とは「$x \in A$ ならば $x \in B$ であり，かつ $x \in B$ ならば $x \in A$ である」ということである．この言い換えは非常に頻繁に使われるので要注意．

定義 1.5. 二つの集合 A と B に対し，これらの**差集合** $B \backslash A$ とは B の要素のうち A には含まれないもの全体の集合である．すなわち，

$$B \backslash A = \{x \mid x \in B \text{ かつ } x \notin A\}.$$

とくに全体の集合 X を固定して考えているときは，$X \backslash A$ を A^c と書き，A の**補集合**と呼ぶ．

定理 1.6 (ド・モルガンの法則)**.** 集合 $A, B \subset X$ について次が成り立つ．

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$
$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c.$$

また，$A_1, A_2, \cdots \subset X$ であるとき次が成り立つ．

$$\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right)^c = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c$$
$$\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)^c = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i^c$$

これらは「p かつ q」の否定が「p でない，または q でない」であることや，「全ての〜」という命題の否定が「ある〜」という形になることと密接に関連している．

練習問題 1.7. 定理 1.6 を示せ．

定義 1.8. 二つの集合 A と B に対し，これらの**直積集合** $A \times B$ とは A の要素と B の要素の組全体の集合である．すなわち，

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ かつ } b \in B\}.$$

練習問題 1.9. $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b, c\}$ のとき $A \times B$ を具体的に書き下せ．

2　自然数から有理数まで

自然数の概念を正確に定義するのは少し大変であるので，ここでは既にわかっているものとして話を進めよう[*3]．整数や有理数が何であるかについての説明は不要かもしれないが，数学的には次のような手順で定義される．

よく知られているように，自然数同士を足すことはできるが引くことは必ずしもできない．例えば1から2は引くことができない．引き算がいつでもできるように自然数を拡張したものを**整数**といい，整数全体の集合を $\mathbb{Z}$ と書く[*4]．整数は自然数の組の集合を用いて構成することができる．例えば，整数 -1 とは引いて-1になる自然数の組全体の集合 $\{(0,1),(1,2),\cdots\}$ のことだと思うことができる．

よく知られているように，整数同士を掛けることはできるが割ることは必ずしもできない．例えば-5は2で割り切れない．割り算がいつでもできるように整数を拡張したものを**有理数**といい，有理数全体の集合を $\mathbb{Q}$ と書く[*5]．有理数は整数の組の集合を用いて構成することができる．例えば，有理数1/2とは割って1/2になる整数の組全体の集合 $\{(1,2),(-1,-2),\cdots\}$ のことだと思うことができる．

このように自然数から始めて，演算が自由にできるように数をだんだんと拡張してゆくと有理数まで到達する．そして，実数も「極限」の演算を自由にできるように有理数を拡張することで得られる．この点について述べるためにはもう少し概念を用意する必要がある．

3　上限，下限

まず，有理数の大小関係について定義される概念をいくつか復習しておこう．

定義 3.1 (上限，下限，極限)**.** 集合 $A \subset \mathbb{Q}$ について，$x \in \mathbb{Q}$ が A の**上界**であるとは，任意の $y \in A$ に対して $y \leq x$ となることである．（要するに x は A のどの要素よりも大きいということ．）

上界のうち最小のものを**上限**といい，$\sup A$ と書く．

また，集合 $A \subset \mathbb{Q}$ について，$x \in \mathbb{Q}$ が A の**下界**であるとは，任意の $y \in A$ に対して $y \geq x$ となることである．（要するに x は A のどの要素よりも小さいということ．）

下界のうち最大のものを**下限**といい，$\inf A$ と書く．

上界をもつ集合を**上に有界**，下界をもつ集合を**下に有界**という．

上にも下にも有界である集合を**有界**という．

ある集合 A について，ある数がその上限になっているかどうかを判定するためには次の定理が有用である．

定理 3.2. 集合 $A \subset \mathbb{Q}$ について以下は同値．

[*3] 興味のある人は「ペアノの公理」について調べてみると良い．この公理を用いると，例えば $1+1=2$ であることを厳密に証明できる．

[*4] Z はドイツ語で数を意味する名詞 Zahl の z．英語で整数は integer という．

[*5] Q は quotient（商）の q．英語で有理数は rational number という．

- $x \in \mathbb{Q}$ は A の上限.
- $x \in \mathbb{Q}$ は A の上界. さらに任意の $\epsilon > 0$ に対してある $y \in A$ が存在して $x - \epsilon \leq y$ となる.

練習問題 3.3. 定理 3.2 を示せ.

上の定理に出てくる「任意の $\epsilon > 0$ に対してある $y \in A$ が存在して $x - \epsilon \leq y$ となる」という一文は,「x は A の要素によっていくらでも精度よく近似できる」という意味である. すなわち, 許容できる誤差の大きさ ϵ をどれだけ厳しくしても[*6], A のある要素をとってくれば x を ϵ よりも小さい誤差で近似できるということを述べている.

下限についても同様のことが成り立つ.

定理 3.4. 集合 $A \subset \mathbb{Q}$ について以下は同値.

- $x \in \mathbb{Q}$ は A の下限.
- $x \in \mathbb{Q}$ は A の下界. さらに任意の $\epsilon > 0$ に対してある $y \in A$ が存在して $x + \epsilon \geq y$ となる.

下限についての議論を上限についての議論に帰着できるため, 次の関係式は非常によく使われる.

定理 3.5. 集合 $A \subset \mathbb{Q}$ の上限が存在するとき, 集合 $-A = \{-a \mid a \in A\}$ の下限が存在して

$$-\sup A = \inf(-A)$$

が成り立つ.

練習問題 3.6. 定理 3.5 を示せ.

練習問題 3.7. 定理 3.5 を用いて定理 3.4 を示せ.

例 2. 集合 $B = \{1, 1/2, 1/3, 1/4, \cdots, 1/n, \cdots\} \subset \mathbb{Q}$ について, 2 は B の上界であり, -1 は B の下界である. また, B の上限は 1 であり, B の下限は 0 である.

練習問題 3.8. 例 2 の主張を確かめよ.

有理数の範囲では, 例え有界な集合であっても上限や下限は必ずしも存在するとは限らない[*7].

練習問題 3.9. 以下の問いに答えよ.

1. 集合 $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}$, $A' = \{(a_1)^2, (a_2)^2, \cdots, (a_n)^2, \cdots\}$ を考える. 任意の n について $a_n > 0$ となるとき, $\inf A$ が存在するならば $(\inf A)^2 = \inf A'$ であることを示せ. (ヒント:定理 3.4 を使う. また任意の $\epsilon > 0$ に対して $\epsilon'^2 + 2\ (\inf A)\epsilon' \leq \epsilon$ となる正の有理数 ϵ' が存在することを用いる.)
2. 数列 x_n を $x_1 = 2$, $x_{n+1} = \frac{2+x_n^2}{2x_n}$ で定めるとき, 任意の n について $x_n^2 \geq 2$ であることを示せ.
3. 任意の n について, $x_{n+1}^2 - 2 \leq \frac{1}{4}(x_n^2 - 2)^2$ であることを示せ.

[*6] ϵ は error の e.

[*7] このせいでピタゴラス教団の数学者・ヒッパソスは処刑された(と言われている).

4. 任意の n について，$x_{n+1}^2 - 2 \leq \frac{8}{4^n}$ であることを示せ.
5. 集合 $S = \{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$ について，$S' = \{(x_1)^2, (x_2)^2, \cdots, (x_n)^2, \cdots\}$ とすると $\inf S' = 2$ であることを示せ.
6. S は有理数の範囲では下限をもたないことを示せ.

有理数だけを考えたとき，上限や下限になる「数」は有理数でいくらでも精度よく近似できるが，必ずしも有理数になるとは限らない．そこで，有界な集合が必ず上限や下限をもつように有理数を拡張し，こうした数も考えられるようにしたものが実数である．

ここで，上限や下限と極限との関係について述べておこう．まず，数列の極限の概念は次のように定義される．

定義 3.10 (数列の極限)**.** 数列 a_n に対し，α が a_n の**極限**であるとは，任意の $\epsilon > 0$ に対して $N \in \mathbb{N}$ が存在し，任意の $n > N$ について

$$|a_n - \alpha| < \epsilon$$

となることである．このとき

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \alpha$$

と書く．

練習問題 3.11. $|a - b| < c$ と $b - c < a < b + c$ は同値であることを示せ.

上限や下限は極限を用いて表すことができる．

定理 3.12. 集合 A の上限 $\sup A$ が存在するとき，A の数列 $\{a_n \mid n = 1, 2, \cdots\} \subset A$ で $\lim_{n\to\infty} a_n = \sup A$ となるものが存在する．

練習問題 3.13. 定理 3.12 を示せ.

逆に，極限を上限や下限で表すことも可能である．このために次の概念を用意する．

定義 3.14 (上極限・下極限)**.** 数列 a_n に対し，その**上極限** $\limsup_{n\to\infty} a_n$ を

$$\limsup_{n \to \infty} a_n = \inf\{\sup\{a_n\}_{n \geq k} \mid k \in \mathbb{N}\}$$

で定義する．同様に，**下極限** $\liminf_{n\to\infty} a_n$ を

$$\liminf_{n \to \infty} a_n = \sup\{\inf\{a_n\}_{n \geq k} \mid k \in \mathbb{N}\}$$

で定義する．

例 3. $p_n = (-1)^n$ のとき，

$$\limsup_{n \to \infty} p_n = 1,\ \liminf_{n \to \infty} p_n = -1$$

である．

練習問題 3.15. 数列 a_n に対し，$\liminf_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty} a_n$ を示せ.

上極限や下極限は「弱い意味での極限」とみることができ，極限とは次のような関係にある．

定理 3.16. 以下は同値.

1. $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$.
2. $\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n = \alpha$.

練習問題 3.17. 定理 3.16 を示せ.

したがって，上限や下限を考えられるようにすれば極限を考えることもできるようになる．上限や下限の方が概念としては基本的なので，こちらを用いて議論を進めることの方が多い.

4 実数の定義

「有理数の集合を数と同一視する」というのが実数の定義で重要な点である[*8].

定義 4.1. $L \subset \mathbb{Q}$ が**下方集合**であるとは，任意の $x \in L$ について，$y \leq x$ ならば $y \in L$ となることである.

例 4. 任意の $x \in \mathbb{Q}$ について，

$$\downarrow(x) = \{y \in \mathbb{Q} \mid y \leq x\}$$

は下方集合.

練習問題 4.2. 任意の $x \in \mathbb{Q}$ について，$\sup \downarrow(x) = x$ を示せ.

練習問題 4.3. 下方集合の和集合は下方集合であることを示せ.

$\downarrow(x)$ を用いると，有理数の大小関係を集合の包含関係で表すことができる.

定理 4.4. 任意の有理数 $x, y \in \mathbb{Q}$ について，以下は同値.

1. $x \leq y$.
2. $\downarrow(x) \subset \downarrow(y)$.

したがって，$\downarrow(x)$ は有理数 x と同一視できそうである．そこで，逆に下方集合 L を $\sup L$ と同一視して有理数を拡張できないかという発想が生じる.

定義 4.5. 実数 $\mathbb{R}$ は

$$\mathbb{R} = \{L \mid L \subset \mathbb{Q} \text{ は有界下方集合 }\}$$

により定義される．その大小関係 $L \leq M$ を $L \subset M$ で定義する.

実数 x は通常数直線上の点 x として理解されるが，この描像との関係について述べておく．x が有理数の場合は $L = \downarrow(x)$ となる．有理数の場合から類推して，一般の L についても $L = \downarrow(x)$ となるように作った想像上の数が x である[*9].

例 5. $\downarrow(\sqrt{2}) = \{y \in \mathbb{Q} \mid y^2 \leq 2\}$ である.

[*8] 実数の定義の方法は色々あるが，「有理数を無限個使って表現される数」を考えて実数を構成することに差はない.
[*9] この意味では実数も相当に imaginary である.

以下ではこの点に留意しつつ，数直線としての理解も用いて議論を進めよう．

上限・下限などの概念は大小関係のみを用いて定義されていたので，実数についても同様に定義できる[*10]．

例 6. x が $A \subset \mathbb{R}$ の上界であるとは任意の $y \in A$ に対して $y \leq x$，すなわち $\downarrow(y) \subset \downarrow(x)$ となることである．

下方集合の和集合は下方集合になることより，次の結果を得る．これは実数の最も基本的な性質であり，**実数の連続性**と呼ばれる．

定理 4.6 (実数の連続性)**.** 上に有界な部分集合 $A \subset \mathbb{R}$ は上限を持つ．

これにより「有界単調列は収束する」という重要な結果を得る．

定理 4.7 (有界単調列の収束性)**.** 上に有界な単調増加数列の極限は存在して，その数列の上限に一致する．また，下に有界な単調減少数列の極限は存在して，その数列の下限に一致する．

特に，上極限の定義に用いた $b_n = \sup\{a_k \mid k \geq n\}$ は単調減少なので，次の結果が得られる．

定理 4.8. 下に有界な数列の上極限は存在する．

もちろん上に有界な数列の下極限も存在する．したがって上極限や下極限は極限よりも存在を示すのが容易である．

5 関数の連続性

関数が連続であるとは大雑把に言って「入力を微調整して出力を少しだけ動かすことができる」ということである．

定義 5.1 (関数の各点連続性)**.** 関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が $x_0 \in \mathbb{R}$ において**連続**であるとは，任意の $\epsilon > 0$ に対してある $\delta > 0$ が存在して，$|x - x_0| < \delta$ ならば

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

となることである．任意の $x \in \mathbb{R}$ において連続であるとき，単に**連続**であるという．

例 7. 関数 $f(x) = x$ は連続である．一方，

$$g(x) = \begin{cases} 1 & (x > 0 \text{ のとき}) \\ -1 & (x \leq 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

と定めると $x = 0$ において g は連続ではない．

練習問題 5.2. 上の例の主張を確かめよ．

関数の連続性は数列を用いても述べることができる．こちらの方がわかりやすいかもしれない．

[*10] 定理 3.2 なども同様に成り立つが，そのためには実数の四則演算を定義する必要がある．もちろん有理数の場合を拡張して定義できるが，これは自明からは程遠い．ここでは説明を省略し，既知のものとして扱う．

定理 5.3. 以下は同値.

1. 関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が $x_0 \in \mathbb{R}$ において連続である.
2. 任意の数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ について，$\lim_{n\to\infty} a_n = x_0$ ならば $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(x_0)$.

練習問題 5.4. 定理 5.3 を示せ.

以上に述べた連続性は各点での連続性であり，許容される誤差の水準 ϵ を実現するためには，考える点を変えるたびに δ を取り直さなければならないかもしれない.

例 8. 関数 $f(x) = 1/x$ については，x が 0 に近いとき，小さな範囲でも非常に値の変動が大きくなってしまうため，x を変えるたびに δ を取り直す必要がある.

これはかなり扱いづらいので，次の概念を考えることが非常に多い．<u>下線部分に注意</u>.

定義 5.5 (関数の一様連続性)**.** 関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が $A \subset \mathbb{R}$ において**一様連続**であるとは，任意の $\epsilon > 0$ に対してある $\delta > 0$ が存在して，<u>任意の $x_0 \in A$ に対して</u> $|x - x_0| < \delta$ ならば

$$|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

となることである.

一様連続性は関数を「どこで」考えているのかが非常に重要な概念である．どのような連続関数も，<u>一部分だけ考えるならば</u>一様に連続であることが次の定理からわかる．**有界閉区間**とは $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ という集合のことである.

定理 5.6. 連続関数は有界閉区間上で一様連続.

一様と各点という区別は微積分に限らず，数学の色々なところで現れる区別である．この差には十分に気を付ける必要がある.

6 閉集合，開集合，有界性

極限の操作と相性の良い集合として閉集合というものがある．これは極限の操作について閉じた集合という意味と考えるとわかりやすいだろう.

定義 6.1. 部分集合 $A \subset \mathbb{R}$ が**閉集合**であるとは，収束列 $\{a_n\}$ が任意の n について $a_n \in A$ であればその極限も A に含まれることである.

なお，閉集合の補集合を**開集合**という.

例 9. 有界閉区間は閉集合．$\mathbb{Q}$ は閉集合ではない.

部分集合 $A \subset \mathbb{R}$ と関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ について，f による A の**像**とは

$$f(A) = \{y \in \mathbb{R} \mid \text{ある } x \in A \text{ について } y = f(x)\}$$

という部分集合のことである.

有界閉集合は極めて性質が良いため，微積分の理論において非常に重要なものである.

定理 6.2. 有界閉集合 $A \subset \mathbb{R}$ について以下が成り立つ.

1. A に含まれる任意の点列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ について，収束する部分列 $\{a_{n_i}\}_{i\in\mathbb{N}}$ が存在し，その極限は A に含まれる.
2. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が連続関数であれば，$f(A)$ も有界閉集合である.

例えば，点列の収束を判定する方法の一つであるコーシーの判定法は次のようにして証明される.

練習問題 6.3. 実数列 $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が**コーシー列**であるとは，0 に収束する数列 r_n が存在して任意の n と $m \geq n$ について

$$|a_m - a_n| < r_n$$

となることである．コーシー列は収束することを以下の手順で示せ.

1. $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は有界である，すなわち $m, M \in \mathbb{R}$ が存在して任意の n について $a_n \in [m, M]$ であることを示せ.
2. コーシー列は収束することを示せ.

7 積分の定義

関数 $f(x)$ の閉区間 $[a, b]$ 上の積分を定義する際，素朴には次のようにすれば良さそうに思える.

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} f\left(a + \frac{b-a}{N} i\right) \frac{b-a}{N}.$$

しかし，次のような疑問が生じてくる.

- 関数 f の $a + \frac{b-a}{N} i$ での値を用いて定義しているが，これは他の点ではダメなのか？例えば $a + \frac{b-a}{N}(i-1)$ など，候補はいくらでもある.
- 区間の分割の仕方を等分にしているが，これは他の方法でも同じ値になるのか？例えば関数の値の変化が大きいところでは分割を細かくするなどの工夫をしたら，極限の値は変わってこないだろうか.

実際，次のような例があるため，これでは定義として不十分である.

例 10. $f(x)$ を x が有理数のとき 0, 無理数のとき 1 となる関数とすると，例えば $[a, b] = [0, 1]$ について上の右辺の極限は 0 となる．一方，f の値を考える点を無理数から選べば極限は 1 になってしまう.

そこで，積分の概念をより厳密な形で定義し，どのような関数なら積分できるのかを明らかにする必要がある．そのためにまず，区間の分割という概念を準備しよう.

定義 7.1. 区間 $[a, b]$ の**分割**とは集合 $\Delta = \{x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n\}$ で

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

となるもののことである．また

$$|\Delta| = \max_{i=1,\cdots,n}(x_i - x_{i-1})$$

を分割の**幅**という．

2 つの分割 $\Delta = \{x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n\}, \Delta' = \{y_0, y_1, \cdots, y_{m-1}, y_m\}$ について Δ' が Δ の**細分**であるとは，$\Delta \subset \Delta'$ となることである．

次に，リーマン和という概念を定義しよう．これは積分の近似値になるものである．

定義 7.2. 区間 $[a, b]$ の分割 $\Delta = \{x_0, x_1, \cdots, x_{n-1}, x_n\}$ と集合 $P = \{p_0, p_1, \cdots, p_{n-1}\}$ で $x_i \leq p_i \leq x_{i+1}$ となるものについて，関数 f の**リーマン和**を

$$S(f, \Delta, P) = \sum_{i=0}^{n} f(p_i)(x_i - x_{i-1})$$

で定義する．P の要素 p_i は区間 $[x_i, x_{i+1}]$ の**代表点**という．

積分の概念は次のように定義できる．

定義 7.3. 関数 f と区間 $[a, b]$ について，f のリーマン和が値 I に**収束する**とは任意の $\epsilon > 0$ に対してある $\delta > 0$ が存在し，$|\Delta| < \delta$ となる任意の分割 Δ と代表点の集合 P について

$$|I - S(f, \Delta, P)| < \epsilon$$

となることである．リーマン和が I に収束するとき，この極限 I を関数 f の区間 $[a, b]$ における**定積分**といい，

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

と表す．

連続関数については問題なく積分ができる．

定理 7.4. 連続関数 $f(x)$ の閉区間 $[a, b]$ 上の定積分は存在して，

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} f\left(a + \frac{b-a}{N} i\right) \frac{b-a}{N}$$

となる．

連続とは限らない関数については注意が必要であるが，例えば有界関数の場合は不連続点の個数が有限個であれば定積分が存在する．