級数の応用

2021 年 12 月 21 日

1　べき級数の項別微分・項別積分

べき級数

$$S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

を x の関数とみたとき，これを積分したものや微分したものはどのように表されるだろうか．実は x が収束半径の内側にあるかぎり，これらは容易に計算できる．

定理 1.1. べき級数

$$S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

に対し，x_0 が $S(x)$ の収束半径の内部にあるなら

$$S'(x_0) = \sum_{k=0}^{\infty} k a_k {x_0}^{k-1}$$

$$\int_0^{x_0} S(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k {x_0}^{k+1}}{k+1}$$

となる．すなわち，和と微分・積分の順序を入れ替えることができる．

これはそれほど当たり前のことではない．

例 1. 例えば

$$S(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

のとき，x_0 が $S(x)$ の収束半径の内部にある，すなわち $|x_0| < 1$ なら

$$S(x_0) = \frac{1}{1-x_0}$$

であるから

$$S'(x_0) = \frac{1}{(1-x_0)^2}$$

$$\int_0^{x_0} S(x)\mathrm{d}x = -\log(1-x_0)$$

と計算できる．これらが元のべき級数を項別に微分・積分したものと一致することは明らかではない．

この定理を利用すると様々な関数のテイラー展開を容易に計算することができる．

例 2. 関数 $\tan^{-1}(x)$ の $x=0$ の周りでのテイラー展開を求める．

$$\tan^{-1}(x) = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$$

と表されることに着目すると $|x|<1$ のとき

$$\tan^{-1}(x) = \int_0^x \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k t^{2k}\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

と計算できる．

また，逆に級数の値を求めるのにも用いることができる．

2　級数の応用：円周率の近似値の計算

次の問題を考えよう．

問： π の近似値を 25 桁まで計算せよ．

円周率を求めるには色々な方法があるが，この問題で要求されている精度の計算を行うには級数による近似計算が最も簡単である．例 2 でみたように，$|x|<1$ のとき

$$\tan^{-1}(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

となる．一方

$$\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$$

であるから

$$\pi = 6\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{2k+1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2k+1}$$

と展開することができる．右辺の級数を N 項目まででで打ち切ったとき，π からの誤差は

$$\begin{aligned}
\left|\pi - 6\sum_{k=0}^{N}(-1)^k \frac{1}{2k+1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2k+1}\right| &\le 6\sum_{k=N+1}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2k+1} \\
&\le 6\sum_{k=N+1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2k+1} \\
&= \frac{6}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2N+3} = \frac{6}{\sqrt{3}-1}\frac{1}{3^{N+1}}
\end{aligned}$$

と見積もることができる．小数点以下 24 桁まで合えば良いので，

$$\frac{6}{\sqrt{3}-1}\frac{1}{3^{N+1}} < 10^{-25}$$

となるように N をとれば良い.

$$\frac{6}{\sqrt{3}-1}\frac{1}{3^{55}} \sim 4.7 \times 10^{-26}$$

なので $N = 54$ とすれば十分であり,

$$6\sum_{k=0}^{54}(-1)^k \frac{1}{2k+1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2k+1}$$

は π の正しい値を 25 桁以上与えることがわかる．あとは $\sqrt{3}$ の良い近似値（これは簡単に求められる）を使うと具体的に π の値を計算できる.

25 桁まで計算するのはやや大変なので 3 桁目まで具体的に計算してみよう．$N = 8$ は

$$\frac{6}{\sqrt{3}-1}\frac{1}{3^{N+1}} < 10^{-3}$$

を満たす．8 項目までの和は

$$6\sum_{k=0}^{8}(-1)^k \frac{1}{2k+1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2k+1} = \frac{6}{\sqrt{3}}\left(1 - \frac{1}{3}\frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{17}\frac{1}{3^8}\right)$$

となる．$\sqrt{3}$ の近似値として 1.7320508 を用いると

$$\frac{6}{\sqrt{3}}\left(1 - \frac{1}{3}\frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{17}\frac{1}{3^8}\right) \sim 3.1415998$$

となり，確かに 3 桁以上一致している.

（本当は $\sqrt{3}$ の近似による誤差も見積もる必要があるがここでは省略する.）